

F6

- Integration: Kvadratur
 - Upprepad trapetsregel, Simpsons formel
 - Extrapolation
 - Generaliserade integraler
 - Gauss-kvadratur
 - MATLAB
 - Monte Carlo

Kvadratur, I

Beräkna $I = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} dx$ som $I \approx \sum_{j=0}^n \underbrace{w_j}_{\text{Vikter}} \underbrace{f(x_j)}_{\text{Abskissor}}$

också $b =$ infty eller där f har integrabla singulariteter,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

- Vikter w_j och ev. abskissor ξ_j väljs för hög noggrannhet

Kvadratur, II

Exempel – Newton-Cotes formler

utgår från ekvidistanta abskissor, $x_j = a + \frac{b-a}{N} j, j = 0, 1, \dots, N$

Trapetsregeln

$N = 1$ ger $w_0 = w_1 = (b-a)/2$. Linjär interpolation ger

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

och felet kan överskattas

$$\begin{aligned} \left| I - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \right| &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in (a,b)} |f''| \left| \int_a^b (x-a)(x-b) dx \right| \\ &= \max_{x \in (a,b)} |f''| \frac{(b-a)^3}{12} \end{aligned}$$

Kvadratur, III

Upprepad Trapetsregel

Med $(x_i, f_i), i = 0, 1, \dots, N$, $x_0 = a$, $x_N = b$, kan trapetsregeln användas för varje delintervall (x_i, x_{i+1}) :

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) \cdot (f_{j+1} + f_j)$$

MATLAB

```
trapz = 0.5*sum(diff(x).*(f(1:end-1)+f(2:end))));
```

För ekvidistanta punkter, $h = x_{i+1} - x_i$, blir formeln

```
Th = h*(sum(f) - (f(1)+f(end))/2);
```

med fel begränsat av $\frac{N}{12} \max |f''| h^3 = \frac{b-a}{12} \max |f''| h^2$

Kvadratur, IV

Euler McLaurins summationsformel

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx + \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) - \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)) + \frac{h^6}{30240}(f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) + \dots$$
$$+ c_{2r}h^{2r}(f^{(2r+1)}(b) - f^{(2r+1)}(a)) + O(h^{2r+2}) \text{ då } h \rightarrow 0$$

- Asymptotisk serie i jämna potenser av steglängden
- Litet fel för periodisk funktion eller
- Små värden i ändpunkterna, ex.

$$\int_{-A}^{+A} e^{-x^2} dx$$

Kvadratur, V

Exempel $\int_{-10}^{+10} e^{-x^2} dx \approx \sqrt{\pi}$

N	T(h)	Fe1
=====		
4	0.00019927	-1.772e+000
8	0.74241496	-1.030e+000
16	1.75869593	-1.376e-002
32	1.77245385	-1.785e-010
64	1.77245385	3.331e-015
128	1.77245385	-3.553e-015

Extrapolation, I

$$I - T(h) = c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \dots$$

Räkna med steglängd h och Qh ($Q = 2$ vanligt)

$$I - T(h) = c_2 h^2$$

$$I - T(Qh) = c_2 (Qh)^2$$

som ger

$$I = \hat{T}(h) = T(h) + \frac{T(h) - T(Qh)}{Q^2 - 1} + k_4 h^4 + k_6 h^6 + \dots$$

$\hat{T}(h)$ har $k_4 h^4$ som dominerande felterm, upprepa:

$$\hat{\hat{T}}(h) = \hat{T}(h) + \frac{\hat{T}(h) - \hat{T}(Qh)}{Q^4 - 1} + d h^6 + \dots$$

Extrapolation, II

Simpsons formel som extrapolerad trapetsregel

$$T(2h) = h(f(a) + f(b)), h = (b - a)/2$$

$$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$

$$\hat{T}(h) = \frac{4}{3}T(h) - \frac{1}{3}T(2h) = h\left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right), \text{ fel } O(h^4)$$

Sammanfatt Simpson:

$$S(h) = \frac{h}{3}(f(a) + 4U + 2J + f(b)),$$

$$x_j = a + jh, h = \frac{b-a}{n}, j = 0, 1, \dots, n, n \text{ jämnt}$$

$$J = 2, 4, 6, \dots; U = 1, 3, 5, \dots$$

Extrapolation, III

Exempel: Numerisk derivering

$$f'(x) - D(h) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots, D(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\hat{D}(h) = \dots = D(h) + \frac{D(h) - D(Qh)}{Q^1 - 1} + kh^2 + \dots$$

I allmänhet *asymptotisk* serie, dvs.

- Felet med n termer minskar då $h \rightarrow 0$
- Ibland konvergerar serien för fixt h då $n \rightarrow \infty$
- Tillämpning också på lösning av differentialekvationer

Integraler, forts.

- Generaliserade integraler

$$1) \quad \int^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int^A f(x)dx$$

$$2) \quad f \text{ inte begränsad: } \int_0 f(x)dx, f(x) = O(x^{-p}) \text{ då } x \downarrow 0$$

- Gauss & adaptiv kvadratur

Integraler, II

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_1^A f(x)dx}_{\text{Trapetsregel, quad, ...}} + \underbrace{\int_A^{\infty} f(x)dx}_{R(A) = \text{"Svans"}}$$

- Välj A så att $|R(A)| < \text{tol}$.
- Är det möjligt (Existerar gränsvärdet då $A \rightarrow \infty$?)

Ja,

”Absolut-konvergens” om $|f(x)| = O(x^{-p})$ med $p > 1$ då $x \rightarrow \infty$

”Betingad konvergens” – svårare,

$$\int_1^A \sin x^2 dx = \int_1^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \right]_1^A - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos t}{4t^{3/2}} dt}_{g(t)}, \quad |g(t)| = O(t^{-3/2})$$

Integraler, III

Exempel

Bestäm integralen med fel $< 0.5 \cdot 10^{-4}$

$$\int_0^{\infty} \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx = \underbrace{\int_0^T \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx}_{I(T)} + R(T), R(T) = \int_T^{\infty} \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx$$

$$R(T) = \int_T^{\infty} \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx < \int_T^{\infty} \frac{30}{x^4} dx = 10T^{-3} < \varepsilon \Rightarrow T > \left(\frac{10}{\varepsilon} \right)^{1/3}$$

Reservera $0.4 \cdot 10^{-4}$ av tillåtet fel för numerisk beräkning av $I(T)$ dvs. tag $\varepsilon = 10^{-5}$. Då räcker $T = 100$.

Fiffigare: Använd approximativa värdet till förbättring ist.f. feluppskattning. Hur stort T räcker då? (på tavlan)

Integraler, IV

Exempel: Integrabel singularitet

$$\int_0^A f(x) dx = \int_0^A x^p g(x) dx, g(x) \rightarrow 1 \text{ då } x \downarrow 0$$

Om $-1 < p < 0$ har f singularitet men integralen existerar.

Prova substitutionen $x = t^a$, $dx = a t^{a-1} dt$

$$\int_0^A x^p g(x) dx = a \int_0^{A^{1/a}} t^{ap} g(t^a) t^{a-1} dt$$

Om $ap + a - 1 = 0$ är integranden snäll vid $t = 0$: $a = 1/(p+1)$

Alternativ:

- Partiell integration (x^p integreras och g deriveras)
- Subtraktion och analytisk integration av x^p ,

Integraler, V

Gauss-kvadratur: Listigt val av både abskissor och vikter så att

$$\int_{-1}^1 f(x)dx - \sum_{j=1}^n w_j f(\xi_j) = 0$$

för $f =$ polynom p av gradtal $2n-1$

- För givna ξ_j kan w_j bestämmas så att felet försvinner för polynom av gradtal $n-1$
- Gauss-vikterna är positiva (numerisk stabilitet)
- Gauss-abskissor i det inre av $[-1,1]$
- ξ_j är nollställena till Legendre-polynomet P_{n-1}

$$\int_{-1}^1 P_j(x)P_k(x)dx = 0, \text{ om } j \neq k$$

- P_m är familj ortogonala polynom,

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = C \cdot (x^2 + c)$$

$$(c = -1/3)$$

Integraler, VI: Multipel-integral (2, 3D)

Kombinera endimensionella kvadraturer

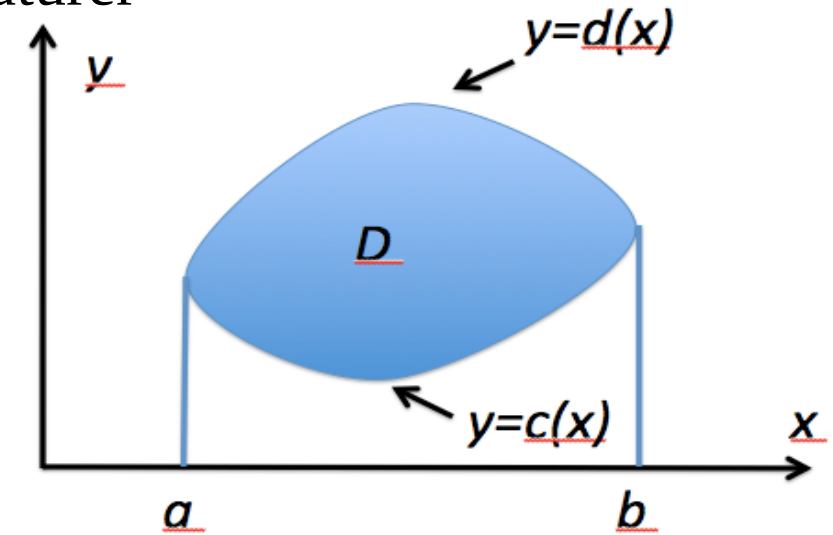
$$\int_D f(x, y) dx dy =$$

$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F_h(x) dx$$

$$\int_a^b F_h(x) dx \approx \sum_{j=0}^N w_j F_h(x_j)$$

Numerisk kvadratur i x-led

$$F_h(x_j) = \int_{d(x_j)}^{b(x_j)} f(x_j, y) dy \approx \sum_{k=0}^M W_j f(x_j, y_k)$$



Integraler, VII: Multipel-integral (MÅNGA D)

- Monte Carlo metoden använder slumpstal för att approximera en integral
- Lämplig för höga dimensioner och vanlig inom finansmatematik
- För reguljära funktioner och lägre dimensioner är deterministiska metoder noggrannare
- Felet i Monte Carlo-integration uppskattas med variansen = $O(n^{-1/2})$

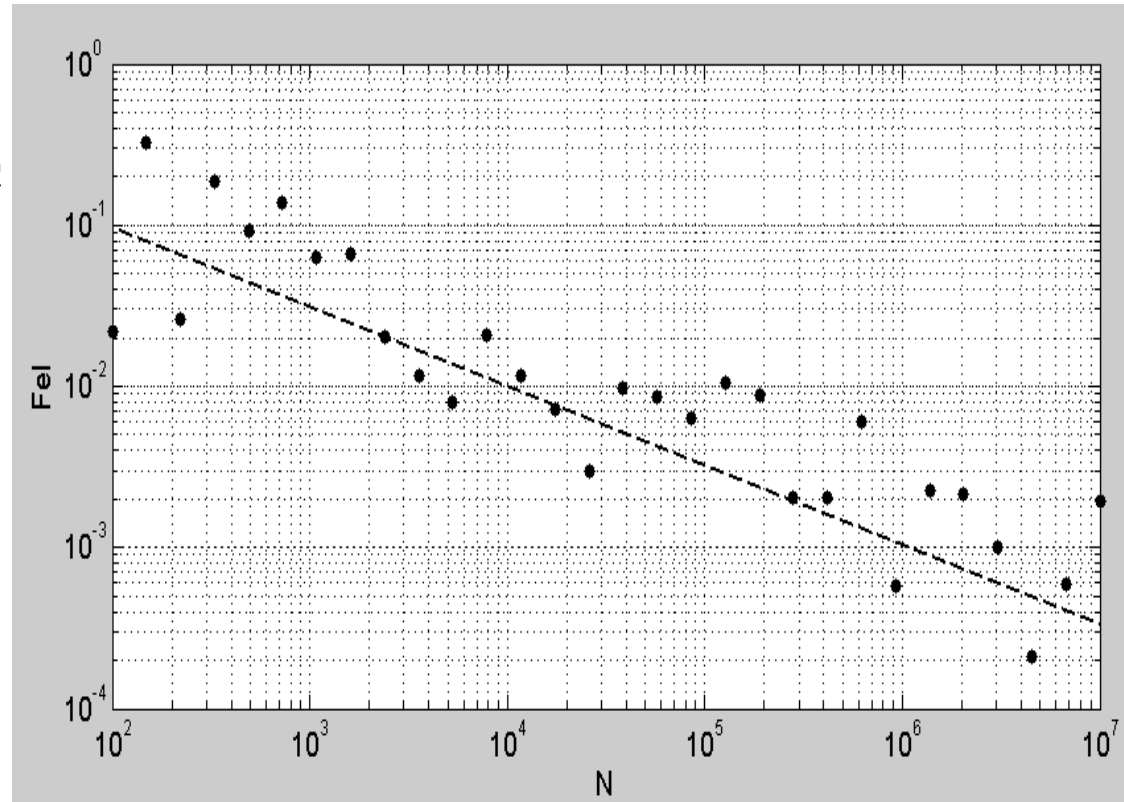
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^N f(X_j), X \text{ rektangulär - fördelad på } [a,b]$$

$$\int_D f(x)dx dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{N} \sum_{j=1}^N f(X_j, Y_j) ((X_j, Y_j) \in D),$$

(X, Y) rektangulär - fördelad på $[a,b] \times [c,d]$

Integraler, VIII: Multipel-integral Exempel

```
h = [1; 1/2 ;1/3];  
n = 30;  
Nlist =  
round(logspace(2,7,n));  
fel = zeros(1,n);  
k = 1;  
for N = Nlist  
xyz = rand(3,N)*2 - 1;  
tmp = diag(1./h)*xyz;  
tmp = sum(tmp.^2);  
vol = 8*sum(tmp<1)/N;  
fel(k) = abs(vol -  
4*pi*prod(h)/3);  
k = k+1;  
end  
loglog(Nlist,fel, '.')
```



Integraler, VI: MATLAB

- **quad(fun, a, b, tol)** integrerar funktionen **fun** mellan a och b (baserad på sammansatt Simpsons formel) med feltoleransen tol
- **quadl** : Gauss-Lobatto formel
- **quadgk** : Gauss-Kronrod-formel
- **quad2d(fun, a, b, c, d)** integrerar fun av två variabler x och y över området $a < x < b, c < y < d$
- **rand** genererar slumpstal likformigt fördelade i $(1,0)$
- **rand(n, m)** genererar en $n \times m$ matris med slumpstal
- **randn()** normal-fördelade $N(0,1)$
- **int(expr)** för symbolisk integration, primitiv funktion till uttrycket “ $expr$ ” bestämmes