Numerisk Integration (kvadratur)

- Integralen approximeras med en viktad summa av funktionsvärden

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I(h) = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

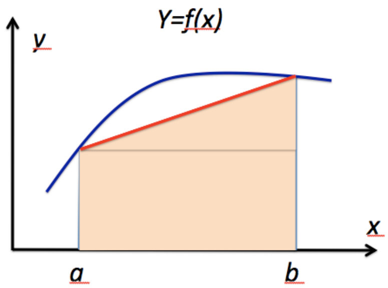
- Vikterna w_j och eventuellt x_j väljes för att få hög noggrannhet
- Jämför med en definition av Riemann integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} \left(h \sum_{n=1}^{n} f(x_j) \right), \quad x_j = a + (j-1)h, \quad h = (b-a)/n$$

Trapetsregeln och Simpsons formel

- Kvadraturformler kan härledas genom integration av interpolerande polynom
- Linjär interpolation ger trapetsregeln (trapetsens yta)

$$I(h) = T(h) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$



- Kvadratisk interpolation ger Simpsons formel

$$I(h) = S(h) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right)$$

Alternativ härledning

- Som alternativ till integration av interpolerande polynom kan vikterna w_j bestämmas genom att kräva att metoden skall vara exakt för $f(x) = 1$, $= x$, etc, för så högt gradtal som möjligt
- Exempel: Trapetsregeln

$$f = 1: \quad T(h) = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 = \int_a^b 1\, dx = b - a$$

$$f = x: \quad T(h) = w_1 \cdot a + w_2 \cdot b = \int_a^b x\, dx = (b^2 - a^2)/2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ (b^2 - a^2)/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-a)/2 \\ (b-a)/2 \end{pmatrix}$$

Sammansatta formler

- I stället för att använda hög ordings polynom vid interpolation är det ofta bättre att dela intervallet för styckvis interpolation. Detsamma gäller för integration
- Sammansatta trapets och Simpsons formler

$$T(h) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2} f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n) + \frac{1}{2} f(x_{n+1})\right)$$

$$S(h) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{3} f(x_1) + \frac{4}{3} f(x_2) + \frac{2}{3} f(x_3) + \frac{4}{3} f(x_4) + \frac{2}{3} f(x_5) \ldots\right.$$

$$. \qquad \left. \ldots + \frac{4}{3} f(x_n) + \frac{1}{3} f(x_{n+1})\right)$$

$$x_j = a + (j-1)h, \; h = (b-a)/n$$

Gauss kvadratur

- Både vikterna w_j och noderna x_j anpassas för hög noggrannhet
- Exempel n = 1, bestäm vikt och nod så att kvadraturen är exakt för f = 1 och $f = x$. Standard intervall (-1.1). (Det ger mittpunktsregeln)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} dx &= w_1 \cdot 1 \rightarrow w_1 = 2 \\ \int_{-1}^{1} x\,dx &= w_1 \cdot x_1 \rightarrow x_1 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx G_1 = 2f(0)$$

- För n = 2 blir Gauss kvadratur exakt för alla tredjegradspolynom

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx G_2 = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

- Transformation till allmänt intervall

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f(x(t))dt, \quad x(t) = (b-a)/(2t) + (a+b)/2$$

Richardson extrapolation

- Använd asymptotisk felutveckling för att kombinera flera beräkningar och få noggrannare resultat
- Exempel: Sammansatt trapetsregel

$$T(h) \approx I = \int_a^b f(x)dx$$

$$T(h) = I + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \ldots$$

$$T(2h) = I + c_1(2h)^2 + c_2(2h)^4 + \ldots$$

$$\rightarrow (4T(h) - T(2h))/3 = (3I + 0 - 12c_2 h^4 + \ldots)/3 = I + O(h^4)$$

- Från en andra ordnings metod erhålles fjärde ordningen (fel = $O(h^4)$)
- Richardson extrapolation kan upprepas genom att använda $T(h)$, $T(2h)$, $T(4h)$, etc

Asymptotisk felutveckling

- Härleding av asymptotisk felutveckling i fallet differensapproximation

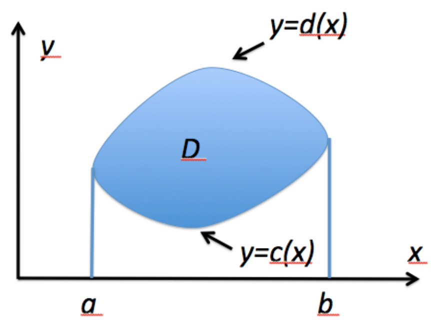
$$D(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = (f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots - f(x))/h =$$
$$= f'(x) + c_1 h + c_2 h^2 \ldots, \quad c_1 = f''(x), ..$$

- Richardson extrapolation för denna felutveckling

$$\rightarrow 2D(h) - D(2h) = f'(x) + O(h^2)$$

Multippel integral

- Kombinera endimensionella kvadraturer



$$\int_D f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx \approx$$
$$\approx \int_a^b F_h(x)dx$$

$$\int_a^b F_h(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j F_h(x_j), \quad (numerisk\ kvadratur\ i\ x)$$

$$numerisk\ kvadratur\ i\ y: \ F_h(x_j) \approx \int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j,y)dy$$

Monte Carlo metoden

- Monte Carlo metoden använder slumptal för att approximera en integral
- Denna teknik är speiellt lämplig för höga dimensioner och vanlig inom finansmatematik

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j), \quad x_j : \ \textit{slumptal, likformigt fördelat i } (a,b)$$

$$\int_D f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j), \quad x_j = (x_j^1, x_j^2, .., x_j^d) \ \textit{ likformigt fördelat i } D$$

- För reguljära funktioner och lägre dimensioner är deterministiska metoder mer noggranna
- Felet I Monte Carlo integration uppskattas med standardavvikelsen = $O(n^{-1/2})$

Oändliga integrander och intevall

- Trunkera integrationsintervallet för att undvika oändligheten
- Om möjligt ersätt den trunkerade delen med approximativ analytisk integral

$$\int_a^\infty f(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx, \quad fel = \left|\int_b^\infty f(x)dx\right|$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty g(x)dx, \quad fel = \left|\int_b^\infty (f(x) - g(x))dx\right|$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad fel = \left|\int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx\right|, \quad "f(a) = \infty"$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=\varepsilon}^b f(x)dx + \int_a^{a+\varepsilon} g(x)dx, \quad fel = \left|\int_a^{a+\varepsilon} (f(x) - g(x))dx\right|$$

Matlab

- quad(fun,a,b) integerar funktionen fun mellan a och b (baserad på sammansatt Simpsons formel)
- quad(fun,a,b,tol) som ovan men med feltoleransen tol
- quad2d(fun,a,b,c,d) integrerar funktionen fun av två variabler x och y över området $a<x<b$, $c<y<d$
- rand genererar slumptal likformigt fördelade i (1,0)
- rand(n,m) genererar en $n \times m$ matris med slumptal likformigt fördelade i (1,0)
- (int(expr) för symbolisk integration, obestämda integralen av uttrycket "expr" bestämmes)