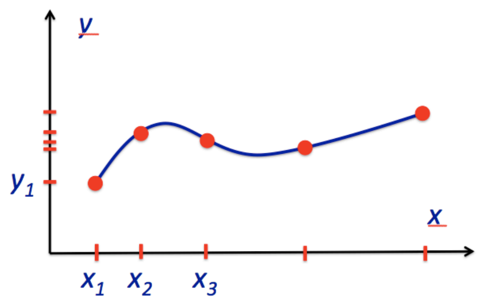
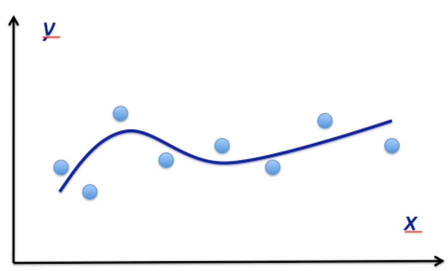
Interpolation

- Vid interpolation anpassas en funktion av förutbestämnd form till givna punktvärden
- Vid polynominterpolation anpassa koefficienterna i polynomet



Jämför approximation, minsta kvadratmetoden



Linjär interpolation - ekvationssystem

- Koefficientanpassningen ges av linjärt ekvationssystem
- Exempel: Linjär interpolation

$$P(x) = c_1 + c_2 x$$
$$P(x_1) = y_1, \quad P(x_2) = y_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystem – Lagrange interpolation

- Polynomet kan uttryckas i en annan bas än 1 och *x*
- Exempel: Lagrange interpolation

$$P(x) = \tilde{c}_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + \tilde{c}_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$P(x_1) = y_1, \quad P(x_2) = y_2$$

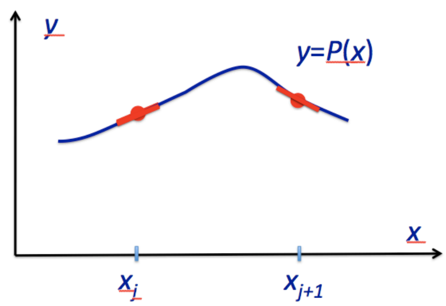
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow P(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- Generell Lagrange interpolation

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)$$

Hermite interpolation

- Anpassning av både funktionsvärde och deivata för tredjegradspolynom



- Lösningen till

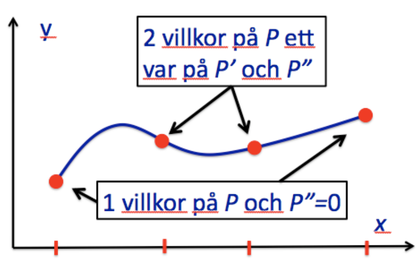
$$P(x_j) = y_j, \quad P(x_{j+1}) = y_{j+1}, \quad P'(x_j) = k_j, \quad P'(x_{j+1}) = k_{j+1}$$

$$\rightarrow P(x_j + th_j) = y_j + t\Delta y_j + t(t-1)g_j + t^2(t-1)c_j, \quad 0 \le t \le 1$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad g_j = h_j k_j, \quad c_j = 2\Delta y_j - h_j(k_j + k_{j+1})$$

Spline interpolation

- Styckvis polynom med krav på regularitet i interpolationspunkterna
- Kubisk spline: Tredjegradspolynom med två kontinuerliga derivator samt ändpunkts villkor



Spline - ekvationssystem

- Spline kurvans koefficienter definieras av de linjära ekvationssystem som ges av villkoren
- *P*(*x*) kan ansättas som allmänt tredjegrads polynom i varje delintervall, Om notationen från Hermite polynom utnyttjas förenklas systemet

$$P(x_j + th_j) = y_j + t\Delta y_j + t(t-1)g_j + t^2(t-1)c_j$$
$$P'(x_j + th_j) = (\Delta y_j + (1-2t)g_j + (2t-3t^2)c_j)/h_j$$
$$P''(x_j + th_j) = (-2g_j + (2-6t)c_j)/h_j^2$$
$$P',\ P''\ \ kontinuerlig \rightarrow$$
$$h_j k_{j-1} + 2(h_j + h_{j-1})k_j + h_{j-1}k_{j+1} = 3\left(\frac{h_{j-1}}{h_j}\Delta y_j + \frac{h_j}{h_{j-1}}\Delta y_{j-1}\right)$$

Spline - ekvationssystem

- För naturlig spline är de extra ändpunkstsvillkoren

$$P''(x_j) = 2(3\Delta y_j / h_j - 2k_j - k_{j+1})/h_j = 0$$
$$\rightarrow 2h_j k_j + h_j k_{j+1} = 3\Delta y_j$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & . & . \\ h_2 & 2(h_2+h_1) & h_1 & 0 & . \\ 0 & h_3 & 2(h_3+h_2) & h_2 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ . \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

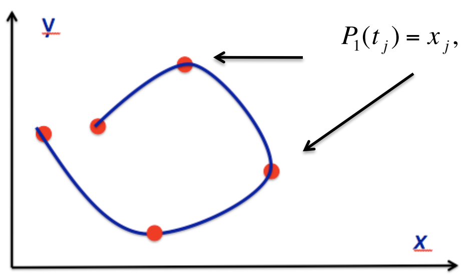
$$b_j = 3(h_{j-1}\Delta y_j / h_j + h_j \Delta y_{j-1}/h_{j-1}), \quad j = 2, 3, .., n-1$$

Kurvinterpolation

- Då en kurva ej är en funktion representeras *x* och *y* som separata funktioner på parameterform

$$x(t) \to P_1(t), \quad y(t) \to P_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

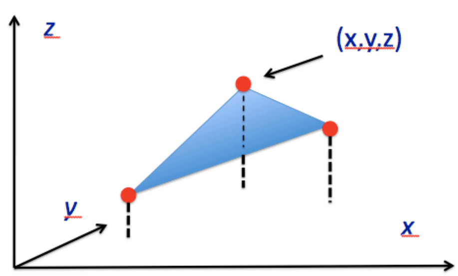
$$P_1(t_j) = x_j, \quad P_2(t_j) = y_j$$



Flerdimensionell interpolation

- Analogt med endimensionella fallet anpassas koefficienter i polynom att ha givna värden i givna punkter
- Exempel: Linjär interpolation i 2 dimensioner

$$P(x_j, y_j) = z_j, \quad j = 1,2,3$$
$$P(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$$



CAD

- Vid "Computer Aided Design" (CAD) och visualisering används ofta styckvisa polynom eller rationella funktioner på parameterform
- NURBS: NunUniform Rational B-Splines (en splinefunktion i två dimensioner dividerad med en annan splinefunktion i två dimensioner)