Partiella differentialekvationer (PDE)

- Partiella differentialekvationer (PDE) innehåller partiella derivator med avseende på flera oberoende variabler
- PDE är en vanlig matematisk modell för många processer, tex. Strömning, värmeledning, akustik, elektomagnetiska vågor, elastisk spänning och förskjutming, elektonfördelning inom molekyler samt prissättning inom aktiemarknaden.
- På samma sätt som vid ODE behandlar vi begynnelsevärdesproblem separat från randvärdesproblem

Begynnelsevärdesproblem

- För PDE innehåller begynnelsevärdesproblem ofta också randvärden och kallas ibland begynnelse – randvärdesvärdesproblem
- Exempel: Värmeledningsekvationen

$$
\begin{aligned}
&u(x,t): \quad temperatur\\
&x: rymdvariabel\ (1D), \quad t: tidsvariabel\\
&K: värmeledningskoeficient
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
u_t = Ku_{xx}, \quad a < x < b, t > 0\\
u(x,0) = u_0(x), \quad a < x < b, \quad (begynnelsevillkor)\\
u(a,t) = u_a(t), \quad t \geq 0, \quad (randvillkor)\\
u(b,t) = u_b(t), \quad t \geq 0, \quad (randvillkor)
\end{cases}
$$

Differensapproximation

- Ersätt derivator med differenser för att approximera lösningen $u(x,t)$ i ett antal punkter i rummet (x) och tiden (t)

$$u_t = Ku_{xx} \to \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = K\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad n = 0,1,.. \;\; j = 1,2,..,J-1$$

$$u(x,0) = u_0(x) \to u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 1,2,..,J-1$$

$$u(a,t) = u_a(t) \to u_0^n = u_a(t_n), \quad n = 0,1,..$$

$$u(b,t) = u_b(t) \to u_J^n = u_b(t_n), \quad n = 0,1,..$$

$$\to u_j^n \approx u(x_j,t_n)$$

$$x_j = a + j\Delta x, \quad J\Delta x = b - a, \quad t_n = n\Delta t$$

Differensapproximation

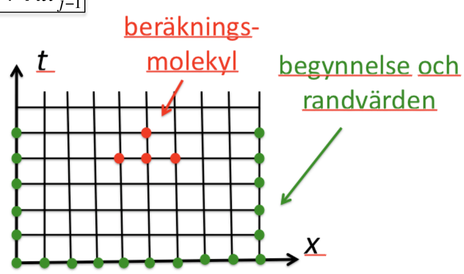
- Alla obekanta kan beräknas via beräningsmolekylen eller från begynnelse och randvillkoren

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = K\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\to \boxed{u_j^{n+1} = \lambda u_{j+1}^n + (1-2\lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n}$$

$$\lambda = \frac{K\Delta t}{\Delta x^2}$$

- Lösningen beräknas med yttre loop över n och inre loop över j



Fel och stabilitet

- Taylorutveckling ger det lokala felet $O(\Delta t^2+\Delta t\Delta x^2)$ och det totala felet $O(\Delta t+\Delta x^2)$ om metoden är stabil
- Metoden kallas stabil om felfortplantningen är begränsad då $\Delta t, \Delta x \to 0$

$$
\begin{aligned}
& u_j^{n+1} + \delta_j^{n+1} = \lambda(u_{j+1}^n + \delta_{j+1}^n) + (1-2\lambda)(u_j^n + \delta_j^n) + \lambda(u_{j-1}^n + \delta_{j-1}^n) \\
& \to \left|\delta_j^{n+1}\right| = \left|\lambda\delta_{j+1}^n + (1-2\lambda)\delta_j^n + \lambda\delta_{j-1}^n\right| \le \\
& \le \lambda\left|\delta_{j+1}^n\right| + (1-2\lambda)\left|\delta_j^n\right| + \lambda\left|\delta_{j-1}^n\right|, \quad (om\ \lambda \le 1/2) \\
& \le (\lambda + (1-2\lambda) + \lambda)\max_{0<j<J}\left|\delta_j^n\right| = \max_{0<j<J}\left|\delta_j^n\right|
\end{aligned}
$$

- Metoden är stabil och konvergerar om $\lambda \le 1/2 \to \Delta t \le \dfrac{\Delta x^2}{2K}$

Randvärdesproblem

- Differensapproximation av randvärdesproblem ger upphov till system av algebraiska ekvationer för de obekanta på liknande sätt som fallet med ordinära randvärdesproblem
- Exempel: Poissons ekvation

$$
\begin{aligned}
& \Delta u = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\
& \to \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{\Delta y^2} = f(x_j, y_k) \\
& j = 1,2,..,J-1, \ k = 1,2,..,K-1 \\
& x_j = j\Delta x, \ y_k = k\Delta y, \quad J\Delta x = K\Delta y = 1 \\
& Randv.\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \ 0 \le x \le 1 \to u_{j,0} = u_{j,K} = 0 \\
& \qquad\qquad u(0,y) = u(1,y) = 0, \ 0 \le y \le 1 \to u_{0,k} = u_{J,k} = 0
\end{aligned}
$$

Ekvationssystem

- Differensapproximationen av Poissons ekvation genererar ett linjärt ekvationssystem. Om steglängderna i *x* och *y* är desamma blir systemet

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ . \\ u_{j-1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ . \\ u_{J-1,2} \\ . \\ u_{J-1,J-1} \end{pmatrix} = \Delta x^2 \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ . \\ f_{j-1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ . \\ f_{J-1,2} \\ . \\ f_{J-1,J-1} \end{pmatrix}$$

Ekvationssystem

- Det linjära ekvationssystemet kan lösas med Gauss elimination (\) eller med iterativ metod.
- Jacobis metod är enkel och visar på principen men i dag finns effektivare metoder, Jacobis metod:

$$AU = F \to (D + B)U = F \to U = -D^{-1}BU + D^{-1}F$$
$$\to U^{n+1} = -D^{-1}BU^n + D^{-1}F, \quad U^0 \quad startvärde$$
$$\to i\ vårt\ exempel:$$
$$u_{j,k}^{n+1} = \left(u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n\right)/4 - \Delta x^2 f_{j,k}/4$$