

LABORATION 2

Integraler, ekvationer, differentialekvationer

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper).

1. Numerisk integration: rotationssymmetrisk lur

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x -axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2 dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.6$. Börja med trapetsregeln med steglängderna 0.1 och 0.05 och extrapolera en gång så att Simpsonvärdet erhålls. Hur många siffror verkar tillförlitliga?

Pröva sedan MATLABs `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

En fin tredimensionell lur bild gör man så här: Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{f}$ vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor $\mathbf{fi}$ för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ och $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} * \text{ones}(\text{size}(\mathbf{fi})); \quad \mathbf{Y} = \mathbf{f} * \cos(\mathbf{fi}); \quad \mathbf{Z} = \mathbf{f} * \sin(\mathbf{fi});$$

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` eller `surfl(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur.

2. Integral med förbehandling. Integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

ska beräknas numeriskt med totalt fel mindre än 10^{-4} . Genomför först en analytisk förbehandling så att det transformerade problemet kan lösas numeriskt. Ledning:

- 1) undersök vilket värde integranden får för $x = 0$
- 2) Gör "svanskapning" för att bestämma vilket ändligt intervall $[0, N]$ som behövs för att bidraget från "svansen" ska bli tillräckligt liten.
- 3) Visa, att $I = \sqrt{\pi}$.

Redovisa den analytiska förbehandlingen!

Deluppgift 1 och 2 godkända (datum, lärarsign):

3. Differentialekvationer - begynnelsevärdesproblem

Givet är differentialekvationsproblemet

$$y'' + \pi y e^{x/3} (2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/3.$$

Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas om till ett system av två första ordningens ODE. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.6$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6} .

Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapene $du_3/dx = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer.

Vilken innebörd har den nyttillkomna ekvationen, dvs vad svarar u_3 mot? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Verkar det bekant?

Lös även uppgiften med `ode45`'s inbyggda tolerans 10^{-3} .

4. Differentialekvationer – Randvärdesproblem

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L och med tvärsnittsarean A och omkretsen p

$$-\frac{d}{dx}(Ak\frac{dT}{dx}) = AQ(x) + \alpha p(T_{ext} - T(x)), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \quad (1)$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L och staven kyls med värmeövergångstalet α . Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att staven har cirkulärt tvärsnitt med radie 1 cm, $L = 2$ [m], $k = 2.5$ [W/(K·m)], $\alpha = 10$ (W/m²/K) $T_0 = 100$ [C], $T_L = 20$ [C], $T_{ext} = 0$ och $Q(x)$ [W/m³] är

$$Q(x) = \frac{300}{w\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x-0.5L}{w})^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

där w är bredden på värmekällan. Prova både $w = 0.5L$ och $w = 0.05L$. Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens erhålles

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} + c_1 T_i = \frac{1}{k} Q(x_i) + c_2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \quad (4)$$

där $\mathbf{A}$ är en $n \times n$ -matris, $\mathbf{T}$ är en $n \times 1$ -vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och $\mathbf{b}$ är en $n \times 1$ -vektor som beror av bl.a. randvärdena T_0 och T_L samt $Q(x_i)$ -värdena.

a) Bestäm konstanterna c_1, c_2 uttryckta i de andra storheterna.

b) Skriv ner matrisen $\mathbf{A}$ för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har $\mathbf{A}$?

c) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet. Matrisen $\mathbf{A}$ kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen skapar du i Matlab på följande sätt:

```
e = ones(n,1); A = spdiags([-e (2+h2*c1)*e -e], -1:1, n,n)/h2;
```

Kommandot `spdiags` skapar *glesa* matriser. Gör (`help spdiags`) ' för mer information.

- Med MATLAB-satsen `Afull=full(A)` skrivs matrisen $\mathbf{A}$ ut på vanlig form. Gör det för $n = 4$ och jämför med resultatet i uppgift a).
- Räkna ut temperaturen $\mathbf{T}$ för fallet $n = 249$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$ i Matlab med `\`.
- Plotta temperaturen som funktion av x på **hela** intervallet $0 \leq x \leq L$. Lösningen $\mathbf{T}$ innehåller inte temperaturen i randpunkterna

- Hur stor är den minimala och maximala temperaturen? (Plocka fram det minsta och största värdet i vektorn T).

5. Skärning mellan ellipser, icke-linjärt ekvationssystem

Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av

$$0.4x^2 + y^2 - xy = 10$$

och den ellips med centrum i $(4, 2)$ och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

$$(x - 4)^2/a^2 + (y - 2)^2/b^2 = 1.$$

Du kan antingen reducera problemet till en skalär ekvation, genom att skriva den axelparallella ellipsen på parameterform, eller lösa det icke-linjära ekvationssystemet. Ellipserna ska ritas. Den sneda ellipsen skrivs bäst i polär form inför uppritningen. De erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm? Skriv ut tabell som visar kvadratisk konvergens.

Laboration 2 redovisad och helt klar!

Datum:

Godkänd av:

Namn: