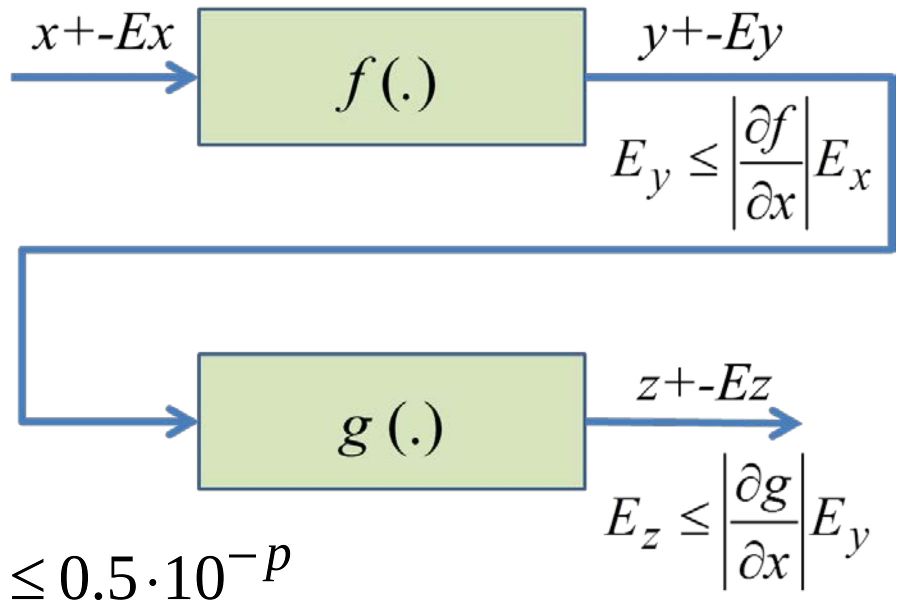
F2

- Känslighetsanalys , felfortplantning
- Avrundningsfel och trunkeringsfel:
- Differensapproximation, NAM 1.3

Känslighetsanalys – felfortplantning

- Närmevärde x’ till x.
- Absolut fel x’ – x, relativt fel (x’– x)/x
- Fel***gränser***: absolut fel $x = x' \pm E_x$



- *x’* har *p* korrekta decimaler om $E_x \le 0.5 \cdot 10^{-p}$

$$x' \cdot 10^n, 0.1 < |x'| < 1, \text{fel } < 0.5\ 10^{-p}$$

- Vad vet vi om x’ har *p korrekta siffror*?

$$\text{Relativfel} < \frac{0.5\ 10^{-p}}{0.1} = 0.5\ 10^{-p+1}$$

- Analysera EXS 8.5, 8.1

$$z = \sqrt{4318} - \sqrt{4317}$$

Inverkan av indata-fel

$$y = f(x)$$

$$f(x+\delta) - f(x) = f'(x)\cdot\delta + O(\delta^2) \text{ då } \delta \to 0$$

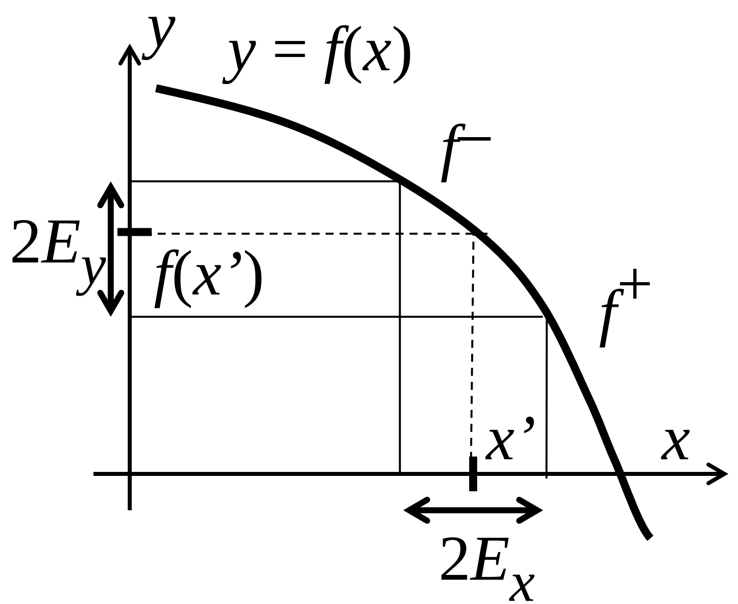
$$|\delta| \le E_x \Rightarrow |f(x+\delta) - f(x)| \le |f'(x)|\cdot E_x (+O(E_x^2))$$

$$E_y \le |f'(x)|\cdot E_x$$

Alternativ " Instängning",

Om svårt att derivera *f*: Beräkna

1. $f^+ = f(x'+E_x)$ och $f^- = f(x-E_y)$;
2. $y = 1/2(f^+ + f^-)$;
3. $E_y = |f^+ - f^-|/2$



Flera oberoende variabler:

Taylors formel för flera oberoende variabler, här tre st.,

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}h_3 + O(h^2)$$

ger "felfortplantningsformeln" för n oberoende variabler,

$$\boxed{E_f \le \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \cdot E_{x_k}}$$

Instängning med n oberoende variabler kräver ***MÅNGA*** *f*-beräkningar:

$$f(x'_1+s_1E_{x_1}, x'_2+s_2E_{x_2}, \ldots, x'_n+s_nE_{x_n})$$

där s_k tar värden +1 och -1. Det blir 2^n olika kombinationer att gå igenom och hitta max. och min.

EXS 8.1

Beräkna med kvadratrötter från tabell med fyra korrekta decimaler. Hur stort relativt fel blir det i z?

$$z = \sqrt{4318} - \sqrt{4317},$$

$$\sqrt{4317} = 65.7039, \sqrt{4318} = 65.7115$$

$$z \approx 0.0074$$

Vi har relativa fel i kvadratrötterna på 8 10^{-7}, max. absolut fel i z på 1 10^{-4} och relativt fel 10^{-4} / 0.0074 = 0.014
Stor noggrannhetsförlust som kommer av ***kancellationen***, subtraktionen av två nästan lika stora tal. Bättre:

$$z = \sqrt{4318} - \sqrt{4317} = \frac{(\sqrt{4318} - \sqrt{4317}) \cdot (\sqrt{4318} + \sqrt{4317})}{\sqrt{4318} + \sqrt{4317}} =$$

$$= \frac{4318 - 4317}{\sqrt{4318} + \sqrt{4317}} = \frac{1}{131.4154}$$

Analys med felfortplantning:

Vi får, med M = 4317 >> 1

$$z = \sqrt{M+1} - \sqrt{M} = \frac{1}{\sqrt{M+1} + \sqrt{M}}$$

Om kvadratroten beräknas med max absolut fel E ger felfortplantningsformeln:

$$E_z \le \frac{2E}{(\sqrt{M+1} + \sqrt{M})^2},$$

$$R_z = \frac{E_z}{z} \le \frac{2E(\sqrt{M+1} + \sqrt{M})}{(\sqrt{M+1} + \sqrt{M})^2} =$$

$$= \frac{2E}{\sqrt{M+1} + \sqrt{M}} \approx R_{\sqrt{\,}}$$

dvs. z kan beräknas med *samma* relativa fel som kvadratrötterna

Differensapproximation, NAM 1.3

Felkällor:
- Fel i indata
- Avrundningsfel: ändligt antal siffror i räkningarna
- Trunkeringsfel: förtida avbrott av gränsvärdesprocess.

Exempel – trunkeringsfel

1. Seriesumma (cf. 1-variabelkurs), N termer

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \underbrace{1 + x + x^2 + ... + x^N}_{S_N} + R_N, \left|R_N\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|x\right|^n = x^{N+1} \cdot \frac{1}{1-\left|x\right|}$$

2. Iteration, N steg

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \text{stanna när } \left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \varepsilon$$

3. Differens-approximation av derivata, h -> 0
(integral, lösning till diff. ekvation, …)

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \underbrace{h \cdot \frac{f''(x)}{2} + O(h^2)}_{\text{Trunkeringsfel}}$$

NAM 1.3

1. Härled trunkeringsfelet R för differensapproximationen

$$D_1(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + R$$

Taylor-utveckling av f runt x ger

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x) + O(h^3) - f(x)}{h} =$$

$$= f'(x) + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot f''(x) + O(h^2)}_{R}$$

Om (dominerande delet av) felet är proportionellt mot h^p kallas formeln noggrann av ”p:te ordningen”. p = 1 kallas ”linjär”

NAM 1.3, forts

Tabellen i boken visar beräknade värden för $f(x) = e^x$ med $x = 1$ med precision 8 decimaler. Det visar, att felet minskar med h till h blir 10^{-4}, sedan ökar det igen för att för $h = 10^{-8}$ bli e – differensen blir precis 0.

Analys:

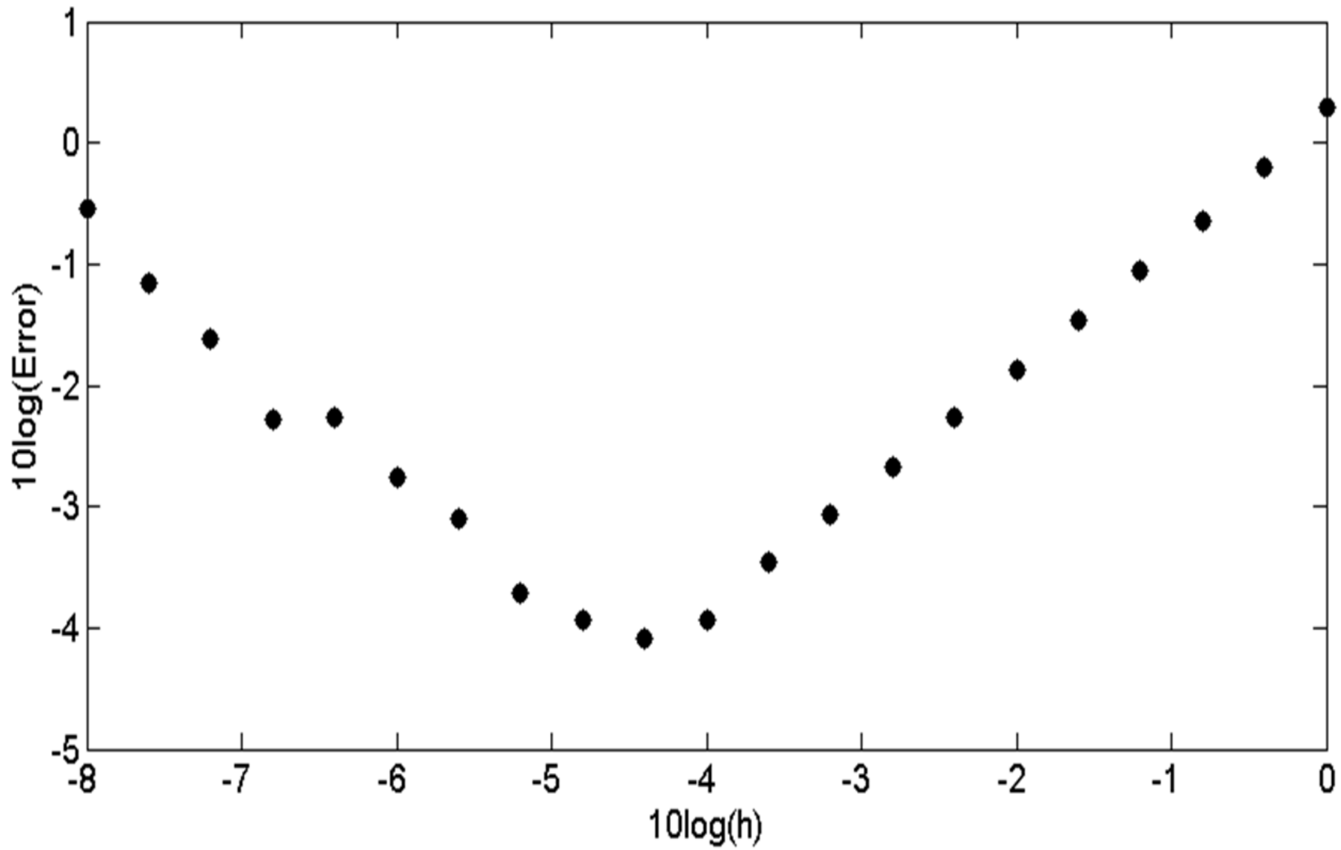
Antag, att funktionen kan beräknas med ett fel som begränsas av Ef (= 0.5 10^{-8}). Skillnaden kan få fel 2Ef. Då blir totala felet begränsat av summan av trunkeringsfel och avrundningsfel:

$$E_{tot}(h) = \frac{h}{2}\underbrace{f''(x)}_{e^1} + \frac{2E_f}{h}$$

som växer som $1/h$ då $h \to 0$ och som h då h växer. Minimum antas för

$$h = \sqrt{\frac{4E_f}{e}} \approx 1.2 \cdot 10^{-4}$$

Här är en log-log plot av resultaten (något fler punkter än i boken) Lutningen för små *h* är -1 och för stora *h* +1. Formeln för ”optimalt” *h* ger *h* = 1.2 10^{-4} – stämmer bra!



Division utan division – analys.

$$f(x) = 1/x - a;\ f' = -1/x^2$$

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

Vi vill se hur x_n konvergerar mot $1/a$ och betraktar felet

$$E_n = 1/a - x_n : \ldots$$

$$1/a - x_{n+1} = 1/a - 2x_n + ax_n^2 = a(1/a - x_n)^2 :$$

$$E_{n+1} = aE_n^2$$

med $l_n = \ln E_n$ får vi

$$l_{n+1} = 2l_n + \ln a$$

För tillämpningen på division av binära flyttal är bara $½ < a < 1$ intressant, så vi tar $a = 1$ och $l_0 = -1$;

$$l_n = -2^n: \qquad E_n = e^{-2^n}$$