

F5

- Olinjära ekvationssystem
- Newton, Jacobian
- Fixpunktsiteration
- Trunkeringsfelsuppskattning
- Kaos

Olinjära ekvationssystem (NAM 6.8)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{f} \text{ i } \mathbf{R}^n$$

Linjarisering av komponent k i $\mathbf{f}$:

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \cdot h_n = 0$$

$$\sum_{j=1}^n J_{kj} h_j = f_k(\mathbf{x}) \text{ där } J_{kj} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}}$$

som för $k = 1, 2, \dots, n$ sammanfattas
som linjära ekvationssystemet för
korrektions-vektorn $\mathbf{h}$

$$\mathbf{J}\mathbf{h} = \mathbf{f}, \mathbf{J} = \{J_{kj}\}$$

Iterativa metoden:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{h}_n,$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ tills } \|\mathbf{h}_n\| \leq tol$$

Jacobian-matrix NAM 6.9.3

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{J} \quad * \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{J}(:,k)
 \end{array}$$

Diagram illustrating the calculation of the Jacobian vector $\mathbf{e}_k$ for a specific column k of the Jacobian matrix $\mathbf{J}$.

The Jacobian matrix $\mathbf{J}$ is shown as a 6x6 grid of elements. The column k is highlighted in yellow, containing the vector $\mathbf{y}$. The other columns are labeled with 'x'.

The vector $\mathbf{e}_k$ is shown as a 6x1 column vector, also highlighted in yellow, containing the vector $\mathbf{y}$. The other elements are 0.

The operation is represented by the equation:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & y & x & x \\ x & x & x & y & x & x \\ x & x & x & y & x & x \\ x & x & x & y & x & x \\ x & x & x & y & x & x \\ x & x & x & y & x & x \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \\ y \\ y \\ y \end{bmatrix}$$

The result is a 6x1 column vector, also highlighted in yellow, containing the vector $\mathbf{y}$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{J}(:,k) \delta$$

Jacobian-matris NAM 6.9.3

```
function J = jacobian(F,x,steg)
n = length(x);
J = zeros(n,n); % pre-allocering
f = feval(F,x);
for k=1:length(x)
    xplus = x;
    if x(k)==0
        xplus(k) = steg;
    else
        xplus(k) = (1+steg)*x(k);
    end
    J(:,k)=(feval(F,xplus)-f)/(xplus(k)-x(k));
end
```

```
function F = heath(xv)
x=xv(1);y=xv(2);z=xv(3);
f=[sin(x)+y^2+log(z)-3
   3*x+2^y-z^3
   x^2+y^2+z^3-6];
end
```

```
function J = Jan(xv)
x = xv(:);
n = length(xv);
J = x*ones(1,n);
```

```
x0 = [1 2 3]';
delta = 1e-4;
J = jacobian('heath',x0,delta)
Jan = Jan(x0)
norm(J(:)-Jan(:))
```

Fixpunktsiteration NAM 6.6, I

Newton-Raphson's metod är
en stationär en-punktsiteration
av formen

$$x_{n+1} = G(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

Ett x med $x = G(x)$ kallas en fixpunkt (eng. fixed point)

Iterationen kan användas till att hitta fixpunkter.

Om man söker nollställena till $f(x)$ får man konstruera ett G .

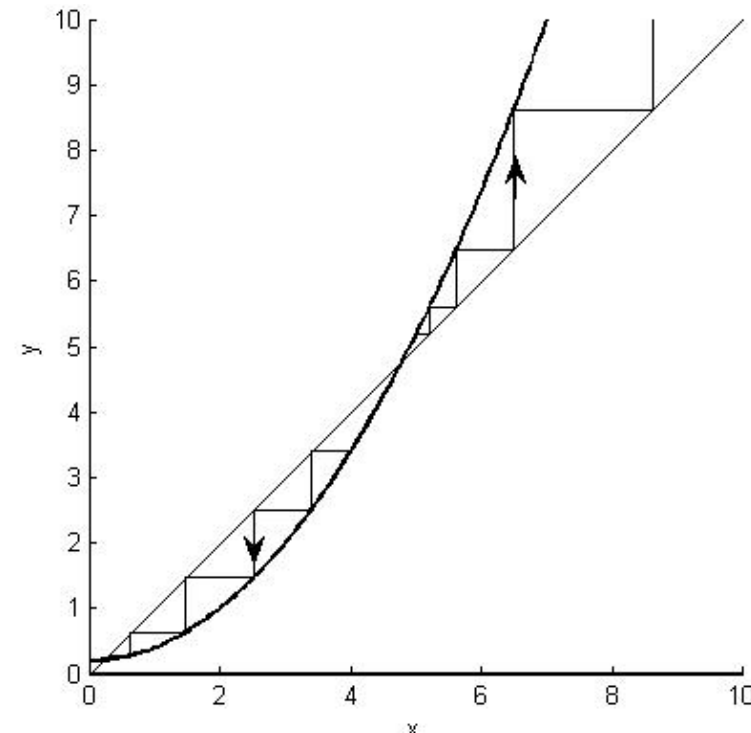
Övning: Hur ser G ut för NR?

Rita kurvorna $y = x$ och $y = G(x)$ och rita

polygontåget där $y_k = G(x_k)$:

$(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+1}), \dots$

$$G(x) = 0.2 + 0.2x^2$$



Fixpunktsiteration NAM 6.6, II

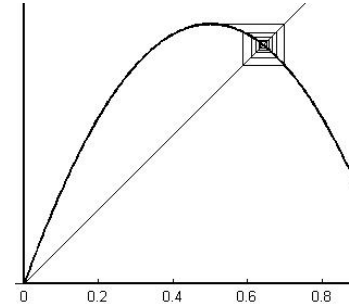
När G är deriverbar så gäller

$$x_{n+1} - x_n = G'(\xi)(x_n - x_{n-1})$$

Fixpunktssatsen:

Om $|G'(\xi)| \leq m < 1$

för alla ξ i tillräckligt stor omgivning till x_0 så



- Det finns precis en fixpunkt α där
- x_j konvergerar mot α
- Det gäller $|x_n - \alpha| \leq \frac{|m|}{1 - |m|} |x_n - x_{n-1}|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = m$

$$\alpha \approx x_n + \frac{m}{1 - m} (x_n - x_{n-1})$$

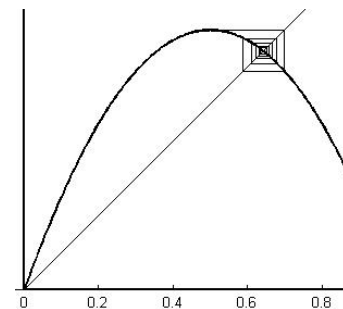
Konvergensen är alltså linjär om m är skild från noll.

För Newton-Raphson blir $G'(\alpha) = 0$ (visa det!).

Fixpunktsiteration NAM 6.6, III

En långsam konvergens kan snabbas upp med ”feltermsskorrektion”:

$$\alpha \approx x_n + \frac{m}{1-m}(x_n - x_{n-1})$$



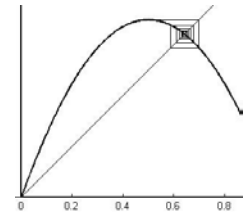
Fixpunktssatsen gäller även avbildningar från t ex $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$.
Om den ”förminskar”,

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{y})\| \leq m \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, m < 1$$

kallas den en *kontraktion*.

Feltermsskorrektion kan inte enkelt användas.

Fixpunktsiteration NAM 6.6, IV



Logistisk ekvation

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), a > 0$$

$$x(a) = 0, 1 - 1/a$$

Vad ger iterationen för olika a ?

- Om $a < 4$ och $0 < x_0 < 1$ kommer alla x_j att ligga i $(0,1)$.
- $G' = a(1-2x)$, $G'(0) = a$ så för $|a| < 1$ konvergens mot 0
- $G'(1-1/a) = -a + 2$ så då $|2-a| < 1$, dvs. $1 < a < 3$ blir det konvergens mot $1-1/a$.

För $a > 3$ är $|G'| > 1$ för alla x i $(0,1)$ så ingen konvergens. Men talföljden är uppåt och nedåt begränsad så det måste finnas hopningspunkter, men vilka? Vi illustrerar med att iterera med många x samtidigt, och ser var de hamnar

Fixpunktsiteration NAM 6.6, V

