Lab3A-uppgifter för OPEN1

3A.1 Skarabén – den heliga pillerbaggen

3A.2 Roddbåten – design- och volymproblem

***3A.3 Kulorna – kulörta kulor på ett snöre**

3A.4 Krocken – cyklist och fotgängare på kollisionskurs

3A.5 Tekannan – designad kanna med pip

***3A.6 Orunda hjul – ovalt kedjehjul på cykeln**

3A.7 Rullbordet – optimal serveringsvagn

3A.8 S-et och vattenrutschbanan – splines i 2D och 3D

***3A.9 Pelaren – hoptryckt stolpe**

3A.10 Guldskatten – glänsande fynd bortom berget

3A.11 Piriformen – välformad väska för bouleklot

3A.12 Splinebilen – häftig bilkaross

3A.13 Kanalen – korsning mellan kanal och kurvig väg

***3A.14 Havsytan – buktning över ett undervattensberg**

3A.15 Badringen – bézierkonstruerad torus

3A.16 Iskanan – snabbt nerför brachistochronbanan

3A.17 Bananen – ätlig volym och skalarea

***3A.18 Klädlinan – tvätt hängd på töjd lina**

***3A.19 Solariet – strålning på en långsträckt kropp**

***3A.20 Åskledaren – ekvipotentialproblem**

3A.21 Geten och hunden – områden att beta och vakta

***3A.22 Bassängen – kakel och vatten i snygg design**

3A.1: Skarabén — den heliga pillerbaggen

I gamla Egypten gjordes avbildningar av den tordyvelliknande heliga pillerbaggen *Scarabaeus sacer*. Dessa så kallade skarabéer användes som amuletter och man lade dem ofta på mumiens bröst. I matematiken beskrivs skarabékurvor av ekvationen

$$(x^2 + y^2 + ay)^2(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)^2 = 0$$

där a är en formbestämmande parameter. I polära koordinater blir skarabéformeln trevligare: $r = \cos 2\varphi - a \sin \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. (Obs! r antar även negativa värden.) Härled formeln. Rita upp skarabéer för a-värdena 0, 0.5, 1, 1.5, 2 och se hur formen beror av a. Beräkna totala omkretsen för var och en av dessa skarabéer — använd en effektiv numerisk metod för integration av båglängdsformeln i polära koordinater. Motivera din integrationsmetod.

Använd ekvationslösning för att bestämma och rita upp den skarabé som har en omkrets på precis tio längdenheter. Denna pillerbagge (med det erhållna a-värdet) är basmodell för fortsatta studier. För att kunna måla skarabéns kropp, huvud och vingar i olika färger måste man först känna till alla φ-värden där r är noll. Bestäm dem och använd `fill`-kommandot för målningen.

Betrakta i fortsättningen både denna symmetriska skarabé samt en något förvanskad och osymmetrisk skarabé som definieras av uttrycket

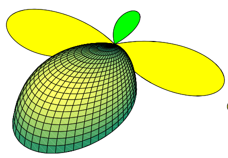
$$r = (\cos 2\varphi - a \sin \varphi)(1 - \frac{1}{9} \sin K\varphi),$$

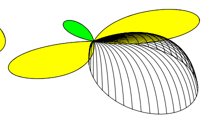
där K är ett jämnt heltal. Pröva både $K = 4$ och $K = 6$. Skarabén uppfyller att $|r|$ har maximum på fyra ställen. Bestäm dessa punkter med gyllenesnittetsökning.

Från huvudets $|r|_{max}$-position utgår Atons livgivande strålar, en genom vardera vingens $|r|_{max}$-punkt och en tredje stråle ned till $|r|_{max}$-punkten på bakkroppen. Strålarna bildar tillsammans med skarabén en variant av livssymbolen *ankh*. Rita hela ankh-symbolen.

Varje vingstråle går genom ytterligare en punkt på vingen. Bestäm positionerna för både vänstra och högra vingens skärningspunkter och markera dem.

Skapa slutligen en tredimensionell pillerbagge. Huvudet och vingarna kan behållas plana, medan kroppen ska konstrueras av en uppsättning kvadratiska bézierkurvor som alla startar i origo, alltså $\mathbf{p}_1 = (0, 0, 0)$. Låt varje bézierkurva finnas i ett vertikalplan som för den j-te kurvan skär xy-planet längs linjen från origo till en punkt $\mathbf{p}_2 = (x_j, y_j, 0)$ på skarabén. Ge lämplig placering av styrpunkten så att den ligger i vertikalplanet och dessutom skapar lagom välvning på pillerbaggskroppen. För 3D-ritningen behövs `plot3` och `fill3`, eventuellt också `surf` (i vänstra figuren nedan).





3A.2: Roddbåten

Med hjälp av en rät linje, en parabel och ett antal kubiska bézierkurvor ska en fyrameters roddbåt konstrueras. Låt bottenprofilen börja som rät linje vid aktern och följa x-axeln från $x = 0$ till $x = 3$ där den övergår till parabeln $z(x) = z_{top}(x - 3)^2$.

Båtens övre ytterkontur vid $z_{top} = 0.7$ är symmetrisk kring x-axeln och bestäms för positiva y av två kubiska bézierkurvor genom punkterna (xy-koordinater):
(0, 0), (1.8, 0.8) och (4, 0). Kurvriktningen är (0, 1) i första punkten och (1, 0) i den andra. Båten ska vid fören ha en vinkel på 72 grader. Använd följande styrpunktsavstånd i testfallet: $a_1 = 0.9$, $a_2 = 1.5$ för första kurvan samt $a_1 = 1.2$, $a_2 = 0.7$ för den andra.

Tvärsnittskurvorna (spanten) i vertikalplan för fixt x utgörs också av kubiska bézierkurvor, samtliga med lodrät lutning vid toppunkten P_1 (där $z = z_{top}$) och med lutningen $\pm 1/2$ vid bottenpunkten P_2 (där $y = 0$). Testfallets styrpunktsavstånd är $a_1 = a_2 = 0.5\,\|P_2 - P_1\|$.
Rita upp konturkurvorna (som plana kurvor i 2D, alltså inte 3D). Rita sedan hela båten i 3D med `surf`-kommandot.

Båtens volym bestäms av $V = \int_0^4 A_{snitt}(x)\,dx$ där integranden är tvärsnittsarean vid fixt x, som för bézierkurvorna med $0 \le t \le 1$ kan skrivas $A_{snitt} = 2\int_0^1 y\dot{z}\,dt$ (eventuellt med ombytt tecken). Verifiera formeln. Beräkna båtvolymen och bedöm noggrannheten i volymvärdet (görs lämpligen experimentellt genom omräkning med halverade steg).

Hur känsligt är volymvärdet för störningar i indata, t ex med ett z_{top}-värde på 0.71? Hur mycket påverkas volymen om styrpunktsavstånden har en osäkerhet på ± 0.05? Gör experimentell störningsräkning för att utröna detta.

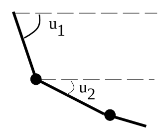
Skapa slutligen en egen designad vackrare bézierbåt med annan vinkel i fören och andra val av styrpunktsavstånd etc.

3A.3: Kulor på ett snöre

Anna har kulörta kulor av blandade storlekar i en låda. Hon väljer ut några kulor (mellan fem och tio stycken), fäster dem på ett rött sidenband med varierande avstånd och knyter fast bandets båda ändar på lika höjd i köksfönstret. Uppgiften är att rita upp Annas fönsterdekoration.

Teori: Häng bandet i x-axeln mellan origo och $x = a$ och låt antalet kulor vara n med massorna m_1, m_2,…, m_n. Kulorna är så tunga att sidenbandets vikt är försumbar. Bandlängderna är $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_N$ där $N = n+1$. Summan av bandlängderna måste förstås vara större än avståndet a mellan upphängningspunkterna. Det är lämpligt att som obekanta införa de N vinklarna u_1, $u_2, \ldots,$ enligt figuren. Vinklarna uppfyller: $\pi/2 > u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_N > -\pi/2$. Motivera det!

Rent geometriskt måste följande samband gälla (motivera!)



$$\sum_{i=1}^{N} L_i \cos u_i = a, \quad \sum_{i=1}^{N} L_i \sin u_i = 0$$

Spännkraften S i varje bandstump har horisontell och vertikal komponent. Jämvikt kräver att

$$\begin{aligned} S_i \cos u_i &= S_{i+1} \cos u_{i+1}, & S_i \sin u_i &= S_{i+1} \sin u_{i+1} + m_i g \\ S_{i+1} \cos u_{i+1} &= S_{i+2} \cos u_{i+2}, & S_{i+1} \sin u_{i+1} &= S_{i+2} \sin u_{i+2} + m_{i+1} g \end{aligned}$$

Elimineras S_i, S_{i+1} och S_{i+2} ur dessa ekvationer fås följande samband (motivera!)

$$m_{i+1} \tan u_i - (m_i + m_{i+1}) \tan u_{i+1} + m_i \tan u_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-2.$$

Dessa kraftsamband utgör tillsammans med de båda geometriska villkoren ett ickelinjärt ekvationssystem för bestämning av vinklarna. Lös det!

Alternativ algoritm som också ska prövas: En idé är att med variabelbyte åstadkomma att ekvationssystemet till största delen blir linjärt. Då skulle det räcka att gissa två värden (t ex u_1 och u_N) och beräkna de övriga med `tridia`. För de båda återstående ekvationerna kan man inte längre beräkna derivatorna analytiskt, men en modifierad Newton med två-gånger-två Jacobianen approximerad av differenskvoter borde gå bra. Utveckla detta till en användbar algoritm och beräkna alla vinklarna.

Kulförsvinnandeproblemet återstår att lösa: Annas pyrotekniskt intresserade pojkvän har i hemlighet preparerat bandet och kulorna och vid nyårsfirandet tänder han på bandet i origo. Det brinner sakta som en stubin utan att gå sönder, men varje gång lågan passerar en kula exploderar kulan och sprider färggrann konfetti över festdeltagarna. Rita upp de olika former kulbandet antar när kula efter kula försvinner, tills så få kulor är kvar att bandet inte hålls sträckt längre.

När detta inträffar kommer bandet att anta kedjekurveform:

$$y(x) = a_f \cosh \frac{x - x_0}{a_f} - a_f + y_0$$

där x_0 och y_0 är koordinaterna för lägsta punkten och a_f är formparameter. Beräkna och rita upp hur bandets form förändras då återstående kulor försvinner en efter en.

Annas dekorationsdata: $a = 80$, $\mathbf{L} = [23\ 10\ 15\ 6\ 20\ 8\ 18\ 15]$, $\mathbf{m} = [7\ 2\ 5\ 3\ 1\ 9\ 4]$.

Du ska dessutom lösa problemet för en egen uppsättning data med andra bandlängder och kulmassor (minst sex olika tunga kulor ska snöret ha).

3A.4: Krocken

I Axelby ligger torget i origo och tvärs genom byn går den alldeles raka X-gatan. Ytterligare en väg leder genom byn, det är den slingriga gamla landsvägen Y-slingan (numera cykelväg) som korsar X-gatan med allt tätare intervall mot utkanten av byn. Y-slingan följer formeln

$$Y(x) = \alpha\, e^{-\beta x} \sin{(x^2)}.$$

Genom följande positionsangivelser kan Y-slingans parametrar α och β bestämmas.

x	0.50	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50
y	0.13	0.40	0.48	0.36	0.03	−0.35	−0.43	−0.01	0.42	0.18	−0.38	−0.13

Osquar börjar sin kvällspromenad vid torget och promenerar med raska steg och konstant hastighet längs X-gatan ut från byn. Vid gatlyktan som finns i första vägkorsningen efter torget tittar han på klockan, den är kvart i nio.

Maggan är samtidigt ute på cykeltur på Y-slingan. På sin artonväxlade hoj far hon fram ganska precis två och en halv gång så snabbt som Osquar går. I en av alla dessa vägkorsningar möts de två och undviker med en hårsmån att kollidera i mörkret (så här långt från torget finns inga gatlyktor längre). Skattande sig lyckliga fortsätter Osquar och Maggan på var sin väg med oförminskad hastighet. Men i nästa korsning är krocken ett faktum!

Krockplats? Hastighetsförhållande? Var befann sig Maggan kvart i nio?

Ur informationen ovan är det möjligt att bestämma krockplatsen och finna det verkliga hastighetsförhållandet q mellan Maggan och Osquar. Hur nära 2.5 hamnar det?
(En hel del båglängdsberäkningar krävs där integrationsgränserna utgörs av nollställen till uttrycket för Y-slingan.)

Ytterligare en fråga ska besvaras: I vilken punkt på Y-slingan befann sig Maggan då klockan var kvart i nio? Hennes position vid denna tidpunkt bestäms av sambandet *Magganväg*$=$ $q\cdot$*Osquarväg*. Lös med en effektiv ekvationslösningsalgoritm; tänk också på att vara smart i det iterativa förfarandet så att varje ny båglängdsberäkning endast behöver utföras över ett kort integrationsintervall.

Gör noggrannhetsbedömning av resultatet med hänsyn tagen till de numeriska metoder som du använt.

Vid rekonstruktionen av olyckan kom det fram att Maggan alltid sneddade i kurvorna så att hon i själva verket följde $y(x) = C \cdot Y(x)$ med ett C-värde strax under ett. Först ryktas det att $C = 0.96$. Hur mycket påverkar det resultaten (q-värdet och Maggans läge kvart i nio)? Någon säger sedan att Maggan sneddar värre än så, $C = 0.92$ ligger nog närmare verkligheten. Hur mycket påverkas resultaten av denna förmodan?

Rita X-gatan, Y-slingan och Maggans sneddade färdväg i fallet $C = 0.92$, markera krockplatsen och Maggans läge klockan kvart i nio i de olika fallen.

3A.5: Tekannan

Som känd designer av bruksting har du av Earl Grey fått en beställning på välformade tekannor. Bézierkurvor passar utmärkt för formgivning; du tänker dig att kannan görs rotationssymmetrisk kring z-axeln och att den genererande kurvan är en kubisk bézierkurva placerad i xz-planet. Det första designförslaget utnyttjar interpolationspunkter vid $x=4,\ z=0$ och $x=2.5,\ z = z_{kanna} = 13,$ kannans bottendiameter är alltså 8 cm och diametern upptill är 5 cm. I detta fall — som alla testräkningar görs på — finns styrpunkterna vid (9, 3) och (8, 6). Beräkna bézierkurvan $\mathbf{r}(t)$ (med komponenterna $q(t)$ i x-led och $z(t)$ i z-led).

Tekannans pip formas som en sned avhuggen kon där varje tvärsnitt i plan parallella med xy-planet är ellipser. Vi kan tänka oss pipen förlängd ned till xy-planet. Där är konens basyta en ellips med halvaxlarna $a_{bas} = 4.2$ cm och $b_{bas} = 3.2$ cm. Konens topp finns vid $x_{top} = 11,\ y_{top} = 0,\ z_{top} = 16$. Då kan uttrycket för konen skrivas i parameterform:

$$\mathbf{r}_{kon}(u, v) = (1 - u)(a_{bas} \cos v,\ b_{bas} \sin v,\ 0) + u\,\mathbf{r}_{top}, \quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

Den verkliga pipen utgör en del av konen, från konens skärning med tekannan (med så småningom bestämda u- och v-värden) upp till $z = z_{kanna}$ där u-värdet är $u_{max} = z_{kanna}/z_{top}$.

Rita upp den piplösa tekannan med `surfl` och lägg till ett surfkommando med den trunkerade konen (u-värden från 0 till u_{max}). MATLAB gör en grov beräkning av skärningen mellan kanna och pip, vilket nog kan ses i din figur.

Uttrycket för den rotationssymmetriska tekannan kan skrivas i parameterform som $\mathbf{r}_{kanna} = (q(t) \cos\varphi,\ q(t) \sin\varphi,\ z(t))$. Ställ upp ekvationssystemet för skärningen mellan kanna och kon (x-, y-, z-samband). Låt v vara variabeln som genomlöper värdena $v = 0,\ dv,\ 2dv, \ldots, \pi$ med lämpligt valt dv (andra halvan ges av symmetrin).

För varje v-värde löses ekvationssystemet, som faktiskt kan reduceras till en enda ekvation för bestämning av t (eliminera φ genom lämplig kvadrering av första och andra sambandet; stoppa in tredje sambandets u-uttryck). Beräkna t och därefter tillhörande u-värde.

Genom insättning av u och v i uttrycket för $\mathbf{r}_{kon}$ ovan erhålls varje enskild skärningspunkts x-, y- och z-koordinater. Rita nu in tekannans pip från skärningen med kannan, och en vacker tekanna kan skådas! Forma gärna ett handtag av en kubisk bézierkurva och kanske ett lock därtill.

Hur mycket te rymmer denna kanna? Gör en ungefärlig volymberäkning (svar i liter med skattad osäkerhet).

Utöver den hittills formgivna tekannan ska du designa minst en tekanna till, gärna med samma höjd men med andra styrpunkter, annan ellipsform för konen och andra koordinater för kontoppen. Får det plats mer te i den nydesignade kannan?

3A.6: Orunda hjul

På Tekniska museet finns en kugghjulsdrift med ovala hjul. Det finns också cyklar med ovala kedjehjul. Idén är att man ska få det lättare i trampornas vändlägen där man har liten momentarm, och ta igen det i ytterlägena där momentarmen är som störst. Uppgiften är att studera hur omkretsen av konvexa höljet varierar med vinkeln α för följande givna hjul. Det elliptiska hjulets ekvation är för $\alpha = 0$: $\mathbf{r}(\phi) = (a\cos\phi,\ b\sin\phi)^T$ med $a = 3$ och $b = 1.5$. Då hjulet vrids vinkeln α blir ellipsekvationen $\mathbf{r}_e(\phi) = \mathbf{S}\,\mathbf{r}(\phi)$ där $\mathbf{S}$ är vridningsmatrisen $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

På avståndet $L = 6$ längs x-axeln finns ett cirkulärt hjul som i parameterform har ekvationen $\mathbf{r}_c(u) = (L + c\cos u,\ c\sin u)^T$ med $c = 1$.

För att vi ska kunna beräkna hela omkretsen av konvexa höljet, betraktat som ett omgivande elastiskt sträckt band, måste bandets tangeringspunkter på cirkelns och ellipsens ovansida först bestämmas. Sambanden kan skrivas som ett ickelinjärt ekvationssystem (obekanta är vinkeln u på cirkeln och parametern ϕ på ellipsen). Motsvarande görs för tangeringspunkterna på undersidan av hjulen.

Omkretsen består av fyra delar. De räta linjestyckenas längder och cirkelbågpartiet är lätta att beräkna, men den delen av bandet som löper längs ellipshjulet kräver en numerisk integralberäkning. Rita upp omkretsen av konvexa höljet för α i intervallet $0 \le \alpha \le \pi/2$ till exempel med steget $d\alpha = \pi/24$.

Om det är en otöjbar kedja som omger hjulen, hur stort slack uppstår?

Vidareutveckling: Man skulle kunna tänka sig en konstruktion som låter axelavståndet L variera med vinkeln α så att kedjan hela tiden hålls sträckt och har längden lika med maximala omkretsen ovan. Det gäller alltså att $L(\alpha) \ge 6$, och det maximala L-värdet uppträder då $\alpha = 0$. Beräkna L_{max} med ekvationslösning. Beräkna och rita upp axelavståndet $L(\alpha)$ i intervallet $0 \le \alpha \le \pi/2$ (med samma steg $d\alpha = \pi/24$ som tidigare utnyttjats).

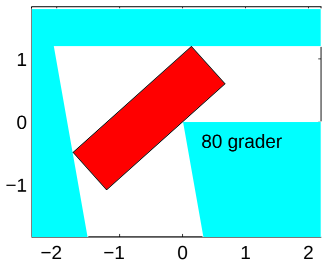
3A.7: Rullbordet

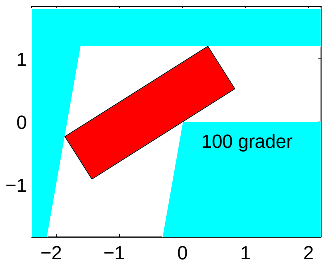
Den anrika festvåningen Vinkeln har fått sitt namn på grund av de vinklade serveringsgångarna som leder från köket till de tre festsalarna. De 80 cm breda serveringsborden som rullas från köket fyllda med mat kan bara ha en viss längd för att inte fastna i korridorhörnen. Restaurangchefen på Vinkeln begär nu din hjälp att räkna ut hur långa borden högst får vara för att klara passagerna.

Närmast köket är serveringsgången 120 cm bred. Korridorerna som leder vidare till festlokalerna är 180 cm breda. Vinkeln mellan serveringsgång och korridor är 90^o till en av salarna och 80^o respektive 100^o till de andra (se figurerna). Använd ekvationslösning för att beräkna hur långt serveringsbordet får vara i de tre fallen. Rita figurer!

Personalen vill ha rullande serveringsbord med maximal area för att få med så mycket mat och porslin som möjligt. Restaurangchefen kan tänka sig att måttbeställa bord med en annan bredd (och längd).

Uppgiften går till dig att räkna fram storleken på det optimala rektangulära rullbordet i de tre fallen. Använd gyllenesnittetmaximering. Arean är en unimodal funktion för bordsbredder i intervallet 60 till 120 cm.





Ännu större area erhålls om de båda kortsidorna på det erhållna bordet rundas till och ersätts av var sin kvadratisk bézierkurva. Hur mycket kan det påverka bordsarean?

3A.8: S-et, åttan och vattenrutschbanan

Matematisk typografi, dvs matematisk beskrivning av formen på bokstäver och siffror, har mer än 600-åriga anor — äldst är förmodligen Felice Felicianos skrifter från omkring år 1460 i Vatikanbiblioteket. Donald Knuth har skrivit en mycket intressant artikel[1] om matematisk typografi i boken *TEX and METAFONT* från 1979.

Det numeriska verktyg som du ska utnyttja för att formge bokstaven S är naturliga kubiska splines (MATLABs inbyggda splines duger inte). Utgå från nio punkter på en handritad S-kurva. Välj punkterna så att avstånden mellan dem blir ungefär lika stora. Det gäller att använda parametriska splines där $x = x(u)$ och $y = y(u)$ är funktioner av den monotont växande parametern u. Låt u vara noll i startpunkten och sedan anta värdena 1, 2,..., 8 i de följande punkterna. Skriv upp en tabell med u-, x- och y-värdena för de nio punkterna (redovisas i rapport och föredrag).

För att åstadkomma tätare tabellering, alltså skaffa mellanliggande kurvpunkter på S-et, ska du göra splinesinterpolation på vardera x och y som funktion av u.

Att använda båglängden som parameter u vore idealiskt men är inte särskilt praktiskt användbart. Den valda parametern u är ungefär proportionell mot båglängden och leder till enkla räkningar.

Rita upp kurvresultatet (x, y) av splinesinterpolationen. Blir bokstaven snygg? Någon av de givna punkterna behöver kanske justeras lite för att S-et ska bli ännu vackrare. Upprepa tills du är nöjd och beräkna därefter längden L_s av hela S-kurvan med stor noggrannhet (noggrannhetsbedömning krävs!).

En lutande åtta — ungefär så här: *8* — ska skapas av kubiska splines, men med hjälp av periodisk kubisk splinesinterpolation i stället för naturliga splines. Utgå även här från nio interpolationspunkter. Ekvationssystemet som bestämmer lutningarna kommer att få annorlunda första och sista rad på grund av den önskade periodiska egenskapen hos åttakurvan. Beräkna och rita åttan och ange dess omkrets.

Vattenrutschbanan: Nu gäller det att åstadkomma en vattenrutschbana som startar 8.5 meter ovan vattenytan i punkten (3, 4, 8.5) och därefter passerar genom följande punkter: (7, 8, 6.7), (11, 2, 5.5), (6, 7, 4.4), (6, 0, 3.5), (10, 5, 2.5), (4, 10, 1.7), (0, 5, 1.0), (4, 0, 0). Utnyttja även här interpolation med parametriska naturliga kubiska splines på samma sätt som vid S-et men nu i tre dimensioner. Beräkna med stor precision längden av rutschbanan.

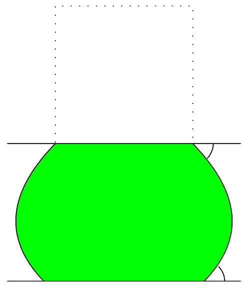
Den erhållna banan uppnår inte den av badhusrådet angivna åklängden som är 65 meter. Utrymmet för rutschbanan är sådant att inga ändringar får ske i x-led och i z-led, däremot anses det tillrådligt att skala om alla y-värden med en faktor β.

Formulera en ekvation och använd lämplig iterativ metod för att beräkna skalfaktorn β. Rita de nio stolparnas nya placering med `stem3` och visa vattenrutschbanan i några olika vyer.

[1] Några klipp ur artikeln kan du få av kursledaren. För Knuth själv var bokstaven S knepigast, läs hans kommentarer.

3A.9: Hoptryckt pelare

Japanska hus ställs ofta på stötdämpande pelare för att minska konsekvenserna av en eventuell jordbävning. En sådan cylindrisk pelare med radien $R = 1$ och höjden $H = 4$ pressas samman mellan två parallella plattor, den undre i planet $z = 0$. Vid hoptryckningen behåller pelaren rotationssymmetrin kring z-axeln. Materialet antas vara inkompressibelt, vilket innebär att volymen hålls konstant.



Då pelaren trycks ihop bågnar den och dessutom töjs ändytorna ut enligt formeln $r = R(1 + G(\sqrt{H/h} - 1))$, där r är cirkelradien när pelaren tryckts samman till höjden h.
G är en glidkonstant som anger glidförmågan vid ändytan.
$G\!=\!0$ svarar mot oändlig friktion och medför $r = R$,
$G\!=\!1$ betyder perfekt glid. (Visa att perfekt glid i båda ändytorna medför att pelaren inte bågnar utan trycks ihop till en kort och tjock cylinder!)

Vi betraktar fallet att $G\!=\!0$ vid övre ändytan och $G\!=\!0.4$ vid den undre. Vinkeln mellan horisontalplanet och den buktiga tvärsnittskurvan i xz-planet är densamma vid övre och undre plattan (se figuren). En kvadratisk bézierkurva är idealisk som modell för kurvan. För rotationsvolymen kan man då använda formeln $V = \int \pi x^2 \dot{z} dt$ (motivera uttrycket). Beräkna och rita under dessa förutsättningar pelarformen för $h = 3.5,\ 3,\ 2.5,\ 2,\ 1.5,\ 1$.

Pelarens totalarea inklusive cirkelareorna kommer först att minska vid hoptryckningen, för att vid kraftig kompression åter öka. Rotationsarean bestäms av formeln $\int 2\pi x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\, dt$ (motivera detta uttryck). När arean blir större än den ursprungliga spricker ytskiktet och pelaren smulas sönder. Beräkna arean för de sju h-värdena från 1 till 4 och markera punkterna i en figur.

Ett uttryck av formen $F(h) = \frac{c_1}{h} + c_2 + c_3 h + c_4 h^2$ ska nu anpassas till areavärdena. Ge en motivering till varför $F(h)$-uttrycket troligen är ett gott modellval. Bestäm koefficienterna med minstakvadratmetoden. Beräkna sedan med hjälp av detta uttryck det kritiska h-värde där söndersmulningen börjar.

3A.10: Guldskatten

Ada och Beda nåddes av ryktet att en glimmande skatt fanns på andra sidan berget i deras tvådimensionella landskap

$$z(x) = A_{topp} e^{-(x-2)^2/4} \quad \text{med} \quad A_{topp} = 4.8.$$

De gav sig i väg samtidigt från hemmet i $(0,\, z(0))$ på jakt efter skatten. Eftersom Beda inte kunde springa lika fort som Ada, fick Ada snart ett stort försprång. I uppförsbacken upp till toppen var Bedas hastighet 20 procent lägre än Adas. I nedförsbacken efter kullens topp lyckades Beda springa lika fort som Ada gjort tidigare, men Ada ökade sin hastighet med 20 procent och rusade från backkrönet med konstant fart fram till den blänkande skatten. I samma ögonblick som hon nådde fram fanns Beda där! Hur kunde det vara möjligt?

Jo, Beda hade vecklat ut sina vingar när hon strax efter kullens topp hade skådat guldskatten i fjärran och tagit fågelvägen rakt på skatten. Bedas flyghastighet var precis lika stor som Adas snabba löpfart. Frågan är: *Var fanns skatten?*

Låt a vara x-koordinaten där Beda lämnar marken. Hon flyger i tangentens riktning och landar vid $x = b$; det ger oss ett samband mellan a och b. Genom vetskapen att Ada och Beda startar samtidigt och når skatten samtidigt kan ytterligare ett samband mellan a och b ställas upp. Lös skattlokaliseringsproblemet med effektiva numeriska metoder.

Hur noggrant kan skattens läge anges om hastighetsändringen på 20 procent som nämns ovan snarare råkar vara 19 eller 21 procent? Om kullens höjd är behäftad med osäkerhet och anges som $A_{topp} = 4.8 \pm 0.1$, hur mycket påverkar det guldskattens positionsbestämning?

Landskapet är faktiskt tredimensionellt enligt funktionsuttrycket

$$z(x, y) = A_{topp} e^{-\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{7}}$$

På vägen till skatten utnyttjade inte Ada och Beda det. När de skulle tillbaka igen flög Beda hela vägen och var snart hemma.

Ada, som måste fotvandra, ville hitta så kort väg som möjligt att ta sig längs 3D-bergets sida från skattplatsen till hemmet i punkten $(0,\, 0,\, z(0, 0))$. Hon är dock begränsad att följa en stig som i horisontalprojektionen utgörs av en kvadratisk bézierkurva med styrpunkt vid $x = 0$. Styrpunktens y-koordinat är den parameter som ska bestämmas så att Adas gångväg hem blir kortast möjlig. Formulera minimeringsproblemet och lös med gyllenesnittetsökning.

3A.11: Piriformen och bouleväskan

En piriformkurva definieras av ekvationen $x^4 - x^3 + y^2/b^2 = 0$ för $0 \leq x \leq 1$. Rita upp några piriformer för b-värden mellan ett och tre. Namnet piriform betyder päronform — för vilket b-värde passar namnet bäst?

En moderiktig boulespelare bär helst sina bouleklot (med radien R) i en väska med plana parallella sidor (planen $z = R$ och $z = -R$) som är piriformytor med b-värdet 1.8. Bärhandtaget finns i origo och väskans utsträckning i x-led är en längdenhet.

Standardväskan innehåller två bouleklot. Kloten kan inte rulla omkring i väskan, utan de nuddar varandra och tangerar dessutom väskans kurviga sarg på två ställen vardera. Problemet blir att bestämma klotens radie och placering i väskan — mittpunktskoordinater: $(a,\ R,\ 0)$ och $(a,\ -R,\ 0)$.

Betrakta genomskärningen i planet $z = 0$ som innehåller två cirklar och en omgivande piriform. Cirkeln i övre halvplanet tangerar piriformkurvan i två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Sex obekanta finns: tangeringspunkternas koordinater samt a och R. Ställ upp sex samband och lös det ickelinjära ekvationssystemet. Det går att reducera antalet obekanta, men då kommer man inte ifrån rotuttryck i ekvationerna vilket komplicerar deriveringen.

Till boulespelet hör en liten målkula som brukar kallas lillen eller grisen. Det finns olika tänkbara placeringar för den i piriformväskan. Om den liksom de båda övriga kloten ska ha centrum i planet $z = 0$, finns ett lagom utrymme för lillen mellan de båda boulekloten och väskans kant vid $x = 1$ (problemet betraktat som ett 2D-problem i planet $z = 0$). Beräkna största möjliga radie för lillen och räkna ut kvoten mellan lillens radie och bouleklotens radie.

Om bouleväskan med sina bouleklot ritas i 3D ser man att målkulan kan göras större om den flyttas ned i z-led. Förutom att nudda kanten $x = 1$ får den tangera planet $z = -R$. Räkna ut lillens maximala radie r_{lill} i detta fall och kvoten r_{lill}/R. Passa på att lägga in en reservmålkula som tangerar planet $z = R$ också. Visa en tredimensionell bild av kloten och den omgivande piriformväskan.

Nu gäller det att åstadkomma en lyxväska med samma piriformkontur som standardväskan, men lyxbouleväskan ska innehålla tre bouleklot och en målkula. Alla boulekloten ska ha centrum i planet $z = 0$ och alla ska naturligtvis vara lika stora. Pröva att placera målkulan på samma sätt som i standardväskan. Beräkna och rita lyxväskan.

3A.12: Splinebilen och andra rymdytor

I ett rektangulärt område i xy-planet är gitterpunkter givna i ett rutnät av ekvidistanta x- och y-värden. I varje gitterpunkt är höjdvärdet känt, det innebär att vi har en indatamatris $\mathbf{z}$ med n_x kolumner och n_y rader. I uppgifterna nedan gäller det att beräkna och rita rymdytor som interpolerar genom alla givna z-värden och som är uppbyggda av naturliga kubiska splines (alltså inte MATLAB-splines).

Ett **landskap** har höjderna z uppmätta för x- och y-värden med $h_x = h_y = 1$ i ett 7×5 rutnät. Använd `stem3` för att åskådliggöra data. Skapa ett mjukt böljande landskap; använd steget $dt = 0.2$ för den lokala variabeln t. Med `surfc` får man förutom rymdytan också nivåkurvor utritade. Men `meshz` passar kanske bäst för uppritningen ändå? Studera landskapet från olika synvinklar med `view`-kommandot.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beräkna hela volymen som landskapet upptar, räknat från marknivån $z = 0$. Det blir en dubbelintegral där analytisk eller numerisk integration kan användas i x-led (snittareor vid fixt y), därefter numerisk integration i y-led. Kontrollera tillförlitligheten i volymvärdet genom omräkning med finare indelning av dt (halverat steg rekommenderas).

Bilkarosskonstruktion

Nu ska du skapa en splinebil och till ditt förfogande finns de två matriserna nedan för bilens framparti och bakparti:

$$\mathbf{z}1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 2.2 & 4.2 & 5 & 5.4 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1.5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}2 = \begin{pmatrix} 4 & 4.5 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 8 & 2.5 \\ 9 & 10 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & 8 & 2.5 \\ 4 & 4.5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

För fronten består gittret av x-värdena $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ och $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. För bakpartiet är x-värdena desamma, men y-värdena är nu $3+a,\ 4+a,\ 5+a,\ 6+a$, där a sätts t ex till 0.7 för att åstadkomma lutande vindruta. Bygg upp en splineyta för vardera bilens fram- och bakparti, $\mathbf{Z}1$ och $\mathbf{Z}2$. Skapa därefter en totalmatris för bilen, $\mathbf{Z}_{tot} = [\mathbf{Z}1\ \mathbf{Z}2]$ och rita upp bilkarossen.

Ett alternativ till naturliga splines är ”fusksplines”, dvs hermiteinterpolation med givna derivator i start- och slutpunkt och centraldifferenskvot för de övriga derivatorna. Utnyttja detta i x-led: Ge ett stort värde på startderivatan (och av symmetriskäl lika stort men negativt värde på slutderivatan) för varje kurva. Experimentera dig fram.

Komplettera uppgiften med lite större indatamatriser och formge en egen ännu vackrare splinebilkaross!

3A.13: Kanalkorsningen

På en karta som visar ett 70 gånger 70 meter stort område finns fyra intressanta punkter med koordinaterna $\mathbf{p}_1 = (5, 2)$, $\mathbf{p}_2 = (62, 68)$, $\mathbf{p}_3 = (12, 70)$, $\mathbf{p}_4 = (70, 17)$. Mellan $\mathbf{p}_1$ och $\mathbf{p}_2$ finns en vägkrök formad som en kubisk bézierkurva med styrpunkterna $\mathbf{p}_3$ och $\mathbf{p}_4$. Mellan punkterna $\mathbf{p}_3$ och $\mathbf{p}_4$ går en kanal buktad som en kvadratisk bézierkurva med styrpunkt i $\mathbf{p}_1$. Rita upp vägkurvan $\mathbf{r}_v(t)$, $0 \le t \le 1$ och kanalkurvan $\mathbf{r}_k(u)$, $0 \le u \le 1$.

Beräkna korsningen mellan kanalen och vägen genom att lösa det ickelinjära ekvationssystemet $\mathbf{r}_v(t) = \mathbf{r}_k(u)$. Beräkna därefter vägsträckan från $\mathbf{p}_1$ fram till kanalen och från kanalen fram till $\mathbf{p}_2$. Hittills har endast mittkurvan för väg och kanal beaktats. Vägen har konstant bredd på $2b_v = 8$ meter och kanalen konstant bredd på $2b_k = 6$ meter. Beräkna och rita vägens och kanalens vänstra och högra randkurvor, det blir så kallade *offset-kurvor*.

En offset-kurva som ligger på avståndet b från en given kurva $\mathbf{r}(t)$ har formeln $\mathbf{r}_{\text{off}}(t) = \mathbf{r}(t) \pm b\,\mathbf{n}(t)$, där $\mathbf{n}(t)$ är kurvans normalvektor med längden ett. Det gäller alltså att $\mathbf{n}(t) = (y'(t), -x'(t))/\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ (förklara detta).

Gör en tredimensionell bild där kanalen har djupet en meter och där vägen är backig, så att höjden för vägkurvan $\mathbf{r}_v(t)$ bestäms av $z(t) = 7.5 - 6.8\cos 12t$.

Beräkna hur långa vägsträckorna från $\mathbf{p}_1$ fram till kanalen och från kanalen fram till $\mathbf{p}_2$ blir, när man tar hänsyn till backigheten.

Här följer en algoritm för 3D-bildkonstruktionen (men det är naturligtvis tillåtet att fundera ut en egen algoritm): Avrunda alla beräknade x- och y-koordinater till heltalsvärden och låt dessa utgöra index i, j till en matris Z vars element är noll överallt utom längs kanalkanterna där Z_{ij} ska vara -1 och längs vägkanterna där Z_{ij} ska följa sinuskurvan. Rita upp med `mesh`-kommandot. Utvidga algoritmen så att hela vägbredden blir sinusformat upphöjd och hela kanalen nedsänkt en meter.

Med `fill3`-kommandot kan du lägga en blå vattenyta på kanalen t ex en halv meter under markytan.

Slutligen, skapa en egen bézierkurveformad stig (eller å) som korsar kanalen eller vägen eller båda. Beräkna även här korsningskoordinater och vägsträckor och rita landskapet.

3A.14: Havsytans buktning över ett undervattensberg

Gravitationen från en kropp ger upphov till en potential. Kring en sfärisk kropp blir ekvipotentialytorna sfäriska. En ostörd vattenyta ställer in sig så att den följer en ekvipotentialyta. Om jordklotet vore en perfekt sfärisk kropp helt täckt av hav skulle havsytan alltså utgöra en perfekt sfär, men så är inte fallet. Man har upptäckt områden i oceanerna där havsytan på grund av gravitationspåverkan från stora undervattensberg ligger många meter över normalnivån.

Uppgiften är att beräkna vattenytans buktning över ett undervattensberg som står på en i övrigt plan havsbotten i ett område där havsdjupet är $H = 10000$ meter. Densiteten för det järnhaltiga berget är $\rho_b = 7870$ och vattendensiteten är $\rho_v = 1000$. Berget antas vara rotationssymmetriskt kring z-axeln med höjden $z_{topp} = 9800$ m och med basradien $R = 8000$ m vid havsbotten (planet $z = 0$). Undersökningen ska utföras dels för ett konformat berg, dels för ett berg format som en halv ellipsoid.

Utnyttja cylinderkoordinater (r, φ, z) för potentialberäkningen. Eftersom problemet är rotationssymmetriskt kommer potentialen i en punkt att vara φ-oberoende och endast bero av höjden ovanför planet $z = 0$ och avståndet från symmetriaxeln. Potentialen Q i en punkt (r_p, z_p) bestäms av

$$Q(r_p, z_p) = (z_p - H)\, g - (\rho_b - \rho_v)\, G \cdot I(r_p, z_p)$$

där $g = 9.80$ är tyngdaccelerationen och $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ är gravitationskonstanten. $I(r_p, z_p)$ är integralen $\int\int\int \frac{dV}{s}$, där s betecknar avståndet från $(r_p, 0, z_p)$ till en punkt (r, φ, z) inuti berget, och integrationen tas över hela bergvolymen.

Trippelintegralen kan uttryckas

$$I(r_p, z_p) = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{z_{topp}} \int_0^{q(z)} \frac{r}{\sqrt{(r\cos\varphi - r_p)^2 + r^2 \sin^2\varphi + (z - z_p)^2}}\, dr\, dz\, d\varphi$$

Härled integranduttrycket! Integrationsgränsen $q(z)$ är bergets radie vid höjden z.

Utnyttja trapetsregeln för all numerisk integration, förslagsvis med 100 eller 200 delintervall i r-led och 300 i z-led. Integranden är en snäll periodisk funktion av φ och det bör räcka med fyra delintervall i $0 \le \varphi \le \pi$. (Motivera detta genom experimentell noggrannhetsbedömning.)

Beräkna potentialen $Q(r_p\,, z_p)$ i ett antal punkter strax ovanför den ostörda havsytenivån, till exempel vid $z_p = H + j$ för $j = 1,\ 2, \ldots,\ j_{max}$, där j_{max} får vara 5 i fallet konformat berg, men måste ha ett högre värde i fallet ellipsoidformat berg.

Låt det radiella avståndet r_p anta värdena 0, 500, 1000, 2000, 4000, 6000, 10000, 20000, 40000, 60000.

Använd MATLABs `contour` för att rita ekvipotentialkurvor.

Intressantast är förstås nollpotentialkurvan. Hur högt över den ostörda havsytan hamnar den? Ur contour-figuren kan den utläsas tämligen väl. Utnyttja ekvationslösning för att med större noggrannhet bestämma nollpotentialhöjderna vid de tio r_p-värdena.

Lägg slutligen en fusksplinekurva genom de erhållna punkterna för att åstadkomma en mjukare nollpotentialkurva.

3A.15: Badringen

Lekmiljörådet konstaterar att badringen är ett av de farligaste lekredskapen. Föräldrar bör se till att barnets badring följer rådets normer, nämligen följande: Hålets minsta diameter ska vara 24 cm. Denna så kallade trångcirkel ska vara nötningsförstärkt.

En nercirkel med diametern 44 cm och 2 cm nedanför trångcirkelplanet ska vara märkt med orden DENNA SIDA NER. En utcirkel med diametern 54 cm och 4 cm ovanför trångcirkelplanet ska märkas DENNA SIDA UT. En uppcirkel, diameter 42 cm, belägen 10 cm ovanför trångcirkelplanet ska bära texten DENNA SIDA UPP. En incirkel, diameter 28 cm och 7 cm ovanför trångcirkeln upplyser att RINGEN BÄR HÖGST XX KG, där XX ska vara 95 procent av ringens volym i liter.

Som badringsfabrikant ställs du inför problemet att konstruera en ring vars tvärsnitt är en sluten kubisk bézierkurva som i lämpligt koordinatsystem startar och slutar i trångpunkten $(0, 0)$ och passerar genom nerpunkten $(10, -2)$, utpunkten $(15, 4)$, upppunkten $(9, 10)$ och inpunkten $(2, 7)$.

Det blir ett ickelinjärt ekvationssystem med åtta obekanta, nämligen t-värdena i de fyra punkterna samt de båda styrpunkternas koordinater. Ställ upp systemet, beräkna jacobianen och lös med Newtons metod. När bézierkurvekonstruktionen är klar gäller det att beräkna volymen av badringen så att du vet vilken bärighet som ska anges.

Volymen bestäms av snittarean multiplicerad med $2\pi x_{tp}$, där x_{tp} är x-koordinaten för snittytans tyngdpunkt (i ett koordinatsystem med origo i badringens centrum). Snittarean ges av formeln

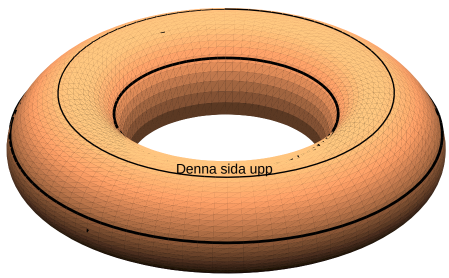
$$A_{snitt} = |\frac{1}{2}\int (x\dot{z} - z\dot{x})\, dt|$$

och tyngdpunkten av

$$x_{tp} = R_{hole} + |\int xz\dot{x}\, dt|/A_{snitt}.$$

Försök att motivera formlerna själv eller ge litteraturhänvisning till uttrycken.

Rita slutligen en tredimensionell bild av badringen som kan användas i marknadsföringen och hitta på ett slagkraftigt namn på produkten. (Texten ”DENNA SIDA NER” etc är tänkta för den verkliga produkten och behöver inte finnas i datorversionen.)



3A.16: Iskanan

Efter det ymniga snöfallet skottades det upp stora snöhögar. Svea och Alfred bestämde sig för att skapa kvarterets häftigaste iskana från toppen av en 22 meter hög backe ner till marken 30 meter bort. Den skulle bli snabbast av alla tänkbara iskanor, alltså en riktig *brachistochron* (av grekiskans *brachistos* kortast och *chronos* tid — enligt Nationalencyklopedin ”problemet att bestämma en väg i ett vertikalplan innehållande två givna punkter A och B så att en masspunkt under inflytande av det homogena gravitationsfältet rör sig från A till B på kortast möjliga tid; lösningskurvan är en cykloid").

De tänkte polera iskanan så att det inte blev någon friktion, och om de gjorde sig riktigt smala blev det nog inget luftmotstånd heller. Nu visste Svea och Alfred inget om cykloider utan kände bara till rät linje, bruten rät linje och bézierkurva. Problemet för dem (och dig) är att för dessa kurvmodeller hitta den snabbaste banan från snöhögens topp, $A = (0,\ 0)$, till markpunkten, $B = (30,\ -22)$.

Låt bankurvan vara $y(x)$. Hastigheten i punkten $(x,\ y(x))$ bestäms av $v = \sqrt{-2gy}$ där $g = 9.81$ är tyngdaccelerationen. Verifiera formeln (visas enklast genom energibetraktelse)!

Det gäller att bestämma bankurvans okända parameter så att åktiden T från iskanetoppen A till markpunkten B minimeras. Uttrycket för T lyder:

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_0^{x_b} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{-2gy(x)}}\, dx.$$

Låt första modellen bestå av en så kallad bruten rät linje med brytpunkt $P = (1,\ -c)$. Det innebär att en rät linje går från A till P och en ny linje finns mellan P och B. Storheten c är en okänd y-koordinat som ska bestämmas så att åktiden T minimeras. Gör analytisk integrering för att erhålla T som funktion av c och använd sedan gyllenesnittetsökning för att minimera T.

Pröva sedan modellen kvadratisk bézierkurva med lodrät startlutning. Okänd parameter är i detta fall styrpunktens y-koordinat. Nu behövs numerisk integration med en effektiv metod, men gör först en substitution för att få bort singulariteten i startpunkten.

Minimera åktiden T med gyllenesnittetsökning. Rita isbanekurvorna! Vilken bör stå som mall för Sveas och Alfreds iskana?

Bestäm också den cykloidkurva som går genom A och B. Cykloiden definieras av följande uttryck med två parametrar R och φ:

$$x = R\,(\varphi - \sin\varphi), \quad y = \pm R\,(1 - \cos\varphi)$$

(negativt y i detta fall). Bestäm parametrarna och rita upp cykloidbanan. Beräkna åktiden T för den snabba cykloidnedfarten; detta kan (och bör) göras utan hjälp av numeriska metoder.

3A.17: Bananen

En banan är inte alltid en banan i EU-mening! Unionens regler föreskriver att bananens medellinje ska vara en cirkel med radien $R = 10$ cm och det ska vara 18 cm raka vägen mellan bananändarna. Om bananen skivas vinkelrätt mot medellinjen ska skivorna bli cirkulära, den största med radien 18 mm. Dessa regler ger banankonstruktören viss frihet. Du väljer att låta ytterprofilen ges av en kubisk bézierkurva från övre änden till mitten och dess speglade kurva från mitten till nedre änden. Den inre profilen bestäms sedan av att medellinjen ska ligga mitt emellan profilerna.

Det finns fortfarande tre frihetsgrader – den ena styrpunktens båda koordinater och den andra styrpunktens y-koordinat. Din uppgift är att välja dessa så att bananens form blir så vacker och bananlik som möjligt. Du vet att den norska bananen Gulebøj har sina styrpunkter på koordinaterna (8, 10) och (11.8, 5) om krökningscentrum läggs i origo, och din banan bör vara minst lika lockande till det yttre. Man köper ändå bananer främst för utseendets skull.

Nu gäller det att beräkna bananens volym, till exempel som summan av bananskivorna $\frac{1}{2}\pi(r_i^2 + r_{i+1}^2)R\,\Delta\phi_i$, och vinkeln ϕ definieras som $\phi = \arctan(y/x)$. Verifiera formeln, gärna med hjälp av figur. Enligt den norska reklamen undantränger en gulebøj 162 ml vatten. Kontrollera uppgiften!

Bananens yttre area ska också beräknas. En lämplig areaformel får man genom att summera bananskivornas mantelytor $\pi(r_i + r_{i+1})R\,\Delta\phi_i$ (verifiera). Gulebøjens area uppges vara 205 cm^2, kontrollera att det stämmer!

Konsumentorganisationerna är angelägna om att inte alltför stor del av bananen är skal. I din reklam vill du visa en bananbild där den inre skalkonturen streckats. En sådan *offsetkurva* på avståndet h från kurvan $\mathbf{r}(t)$ har formeln $\mathbf{r}_{\text{off}}(t) = \mathbf{r}(t) \pm h\,\mathbf{n}(t)$. Här är h skaltjockleken 0.25 cm och $\mathbf{n}$ kurvans normalriktning som beräknas enligt $\mathbf{n}(t) = (y'(t), -x'(t))/\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ (förklara detta).

Skalets volym får man genom att multiplicera bananens area med skaltjockleken. Modifiera nu areaformeln genom att minska r med halva skaltjockleken. Ett annat sätt att få skalets volym är att beräkna den skalade bananens volym och subtrahera den från den oskalade volymen. Gör det också för kontroll av det tidigare skalvolymvärdet.

Gör tillförlitlighetsbedömning av alla resultat.

Av de beräknade värdena framgår hur många procent av bananen som är skal. Gör ett praktiskt experiment med en verklig banan och jämför resultaten!

3A.18: Klädlinan

En tvättlina med längden L_b är elastisk med fjäderkonstanten k. På den osträckta linan mellan punkterna (0, 2) och (2.5, 2) finns n stycken krokar (knutpunkter) på inbördes lika avstånd $L_x = 2.5/(n+1)$, där man hänger galgar med olika tunga plagg. Plagget på den i-te kroken har tillsammans med galgen och kroken massan m_i. Kraftsambanden kring varje knutpunkt ger ett ickelinjärt ekvationssystem med $2n$ ekvationer för att bestämma de $2n$ obekanta x- och z-värdena för knutpunkterna.
Låt den i-te punkten betecknas $\mathbf{H}$ (= here), dess västra granne $\mathbf{W}$ och dess östra granne $\mathbf{E}$. Den töjda linan mellan $\mathbf{W}$ och $\mathbf{H}$ har längden $L_W = \|\mathbf{W} - \mathbf{H}\|_2$. Kraftsambandet runt punkten $\mathbf{H}$ lyder:

$$\mathbf{S}_W + \mathbf{S}_E - m_H\, g\, \mathbf{e}_z = 0$$

där $\mathbf{S}_W = k(1 - L_x/L_W)(\mathbf{W} - \mathbf{H})$, och $\mathbf{S}_E$ erhålls genom att byta W mot E. Lös det erhållna ickelinjära ekvationssystemet med Newtons metod; utnyttja differenskvoter som approximation till jacobianelementen.
Testdata: Fjäderkonstanten $k = 250$, tyngdaccelerationen $g = 9.81$, antalet krokar $n=5$. Plaggens vikt (i kg): $m_1=0.4$, $m_2=0.1$, $m_3=0.4$, $m_4=0.7$, $m_5=0.2$.
Rita resultatet! Undersök också hur mycket maximala nedhängningen påverkas, då plaggen byter plats på linan.
Pröva sedan andra n-värden och upphängda plagg med andra vikter.

3A.19: Solariet

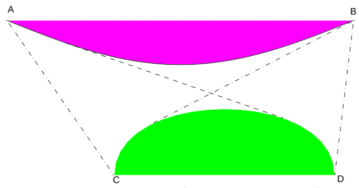
På golvet $z = 0$ ligger en långsträckt kropp som utsätts för ultraviolett strålning av en på höjden $H = 0.7$ placerad radiator. Kroppen och radiatorn antas ha så stor utsträckning i y-led att det hela kan betraktas som ett plant problem i xz-planet. Uppgiften är att bestämma hur stor del av den totala strålningen från radiatorn som når kroppsytan. Kalla denna andel för β, $0 < \beta < 1$.

Radiatorn har ändpunkterna A $= (-\pi/4,\, H)$ och B $= (\pi/4,\, H)$ med tvärsnittsformeln: $z = H - 0.2\cos 2x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.

Kroppen har ett symmetriskt tvärsnitt som är en kubisk bézierkurva med ändpunkterna C$= (-0.5 + a,\, 0)$, D $= (0.5 + a,\, 0)$ och med vertikala kurvriktningar i dessa punkter. Mittpunktens z-värde är 0.3. Uttryck tvärsnittskurvan i parameterform med polynom för $x_{\text{kropp}}(t)$ och $z_{\text{kropp}}(t)$.

Beräkna strålningsandelen $\beta(a)$ för några a-värden i området $0 \leq a \leq 1$. Börja med fallet $a = 0$ då kroppen befinner sig rakt under den strålande ytan och fortsätt med minst två värden fram till $a = 1$. En geometrisk metod för att beräkna β är den så kallade *trådmetoden*. Spänn trådar från punkterna A och B till punkterna C och D enligt figuren. Då gäller följande häpnadsväckande formel för β:

$$\beta = (\text{AD} + \text{BC} - \text{AC} - \text{BD})/2L_{\text{AB}}$$



där L_{AB} är radiatorkurvans båglängd. Några trådar är som synes helt raka medan andra delvis ligger an mot kurvorna.

För att kunna beräkna en trådlängd måste vi först finna punkten (punkterna) där tråden släpper kurvan (kurvorna). Kravet på lika lutning leder fram till ganska enkla samband mellan t-värdet på kroppen och x-värdet på radiatorn.

Trådlängden som ligger an mot radiatorn bestäms av båglängdsintegralen $\int \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$ (derivatan beräknas analytiskt). Motsvarande görs för kroppens parameterkurva.

Gör tillförlitlighetsbedömning av de erhållna strålningsandelsvärdena.

3A.20: Åskledaren

En ledande vertikal pelare formad som en halv ellipsoid tas som modell för en åskledare. Uppgiften är att beräkna ekvipotentialkurvor runt åskledaren under ett åskväder. Potentialen är noll på åskledarens yta och i det horisontella planet (jorden) $z = 0$. Ellipsoiden beskrivs av följande ekvation med $a = 1$, $b = 2$, $c = 100$, $z \geq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

Fördelen med att räkna på en ellipsoidisk ledare i stället för en mycket tunn cylinder är att potentialen V i punkter i rymden utanför ellipsoiden kan skrivas som ett explicit uttryck enligt formeln

$$V(x, y, z) = E\,z\,\frac{G(p)}{G(\infty)} \quad \text{eller} \quad G(p) - V\,\frac{G(\infty)}{E\,z} = 0 \qquad (2)$$

E är fältstyrkan på stort avstånd från åskledaren; åskmolnet betraktas som oändligt avlägset och med oändlig utsträckning. Lämpligt värde är $E = 200$ V/m. Funktionen $G(p)$ är integralen

$$G(p) = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{u}{a^2})(1+\frac{u}{b^2})(1+\frac{u}{c^2})^3}}\,du \qquad (3)$$

och mellan x, y, z och p finns sambandet

$$\frac{x^2}{a^2+p} + \frac{y^2}{b^2+p} + \frac{z^2}{c^2+p} = 1 \qquad (4)$$

På planet $z = 0$ och på åskledarens yta där $p = 0$ gäller $V = 0$. Ekvipotentialkurvor önskas för potentialerna 125, 250, 500, 1000, 2000 V, dvs $V_j = 2\,V_{j-1}$.

Börja med att beräkna värdet $G(\infty)$ och visa med analytisk betraktelse att värdet har minst fem korrekta siffror.

Ur sambandet (2) kan p-värdet för given potential V_j och given höjd z_i bestämmas. Det blir ekvationslösning som kompliceras av att integralen (3) ingår. När alla p-värden är kända kan ekvipotentialkurvorna erhållas genom formel (4).

För att kurvorna i vertikalplan inte ska bli kantiga behövs många z-värden. Ta till exempel steget $\delta z = -0.5$ från $z = 100$ till $z = 95$, sedan förslagsvis $\delta z = -5$ ned till $z = 20$ och därefter lite tätare igen till slutvärdet $z = 10$ (eller lägre).

Eftersom ett stort antal p-beräkningar behöver utföras och var och en innehåller ekvationslösning med integralberäkning är det nödvändigt med en effektiv algoritm. Bra startvärden gör ekvationslösningarna snabbare. En god idé kan vara att beräkna och lagra p-värdena i en matris i ordning från små till stora värden och utnyttja ett tidigare resultat som startvärde, till exempel så här:

Börja vid högsta höjden z_1 och lägsta potentialen V_1 och beräkna $p_{1,1}$ ur ekvation (2). Därefter beräknas $p_{1,j} = p(z_1, V_j)$ för $j = 2, 3, 4, 5$. Fortsätt med nästa rad i matrisen: Bestäm $p_{2,1}$ med $p_{1,1}$ som startgissning, beräkna sedan $p_{2,j}$ för $j = 2, 3, 4, 5$, och så vidare.

Obs! Lösning finns endast om $V_j/E\,z_i < 1$. Om z_i är litet och V_j är stort finns ingen rot till ekvationen. Förklara varför!

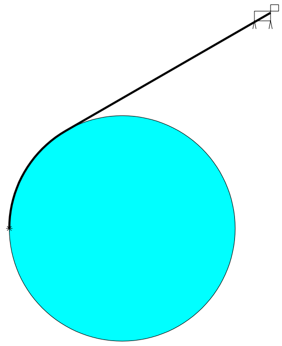
Med hjälp av formel (4) kan nu ekvipotentialkurvorna beräknas och ritas. I horisontella plan blir det kurvor av känt slag; rita upp några, t ex vid $z = 100, 95, 80, 40$. I vertikala plan får kurvorna en mer komplicerad form; rita sådana i de tre vertikalplanen $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

En tredimensionell bild med ekvipotentialytor är trevlig men inte obligatorisk.

3A.21: Geten och hunden

En cirkulär simbassäng med radien $R = 7.00$ m står på en stor gräsmatta. För att slippa klippa gräsmattan har tomtägaren skaffat en get som får beta av gräset.

Geten är bunden med ett rep med längden 22.00 m som är fastsatt vid bassängkanten i gethöjd. Visa att replängden i detta fall med god precision kan uttryckas som πR.



Eftersom poolen har höga kanter går repet aldrig över poolkanten. När repet är sträckt ser det ut som i figuren (sett uppifrån med liggande get!).
Beräkna och rita området som geten Ragge kan vistas på och bestäm gräsmattsarean.

Beräkna också längden på det stängsel som tomtägaren sätter upp runt getens område för att hindra familjens bandhund att komma åt Ragge.

Hunden Karo som är kopplad vid bassängkanten diametralt sett från getens repkrok ska förhindra oönskade badgäster. Tomtägaren anser att av rättviseskäl ska hunden kunna röra sig på gårdsplanen inom ett område precis lika stort som getens gräsyta. Beräkna hur långt hundkopplet måste vara och rita områdets kontur.

Slutligen önskas två kubiska bézierkurvor som ger god anpassning till Karos konturkurvor för $y \geq 0$ (en bézierkurva för yttre konturen och en för den inre). Spegla kurvorna i x-axeln och beräkna arean för att se hur väl värdet överensstämmer med det tidigare erhållna areavärdet för Karo och Ragge.

3A.22: Bassängen

Familjen Persson har bestämt sig för att anlägga en snyggt designad swimmingpool på sin villatomt på en kvadratisk yta som är tio gånger tio meter. Ditt vinnande förslag är en bassängform som bestäms av området mellan två kurvor $y = c(x)$ och $y = d(x)$ för $0 \leq x \leq 10$. Ett trädäck läggs intill bassängen för att fylla det 100 m^2 stora utrymmet.

Polynomkurvan $y = c(x)$ bestäms genom interpolation i punkterna $(0, 4)$, $(2, 1.8)$, $(4, 2.6)$, $(7, 1.5)$ och $(10, 4)$. Kurvan $y = d(x)$ definieras av $d(x) = 9 - 0.15\,(x-5)^2$.

Eftersom poolen ska passa både barn och vuxna låter du den få en mjukt formad buktig botten enligt $z = -F(x, y)$ där

$$F(x, y) = (1.2 + (y - 0.1y^2 - 0.5)\sin x)\, e^{-((x-6)^2+(y-5)^2)/8} + 1.$$

Uttrycket är symmetriskt i y-led omkring $y = 5$. För att finna bassängens djupaste och grundaste platser går det därför bra att arbeta med funktionsuttrycket $F(x, 5)$. Bestäm dessa positioner med stor noggrannhet.

Familjen Persson undrar hur mycket vatten som ryms i bassängen om den fylls helt och hållet. Det blir en dubbelintegralberäkning som kräver numeriska metoder.

Perssons funderar på att ha mosaikkakel på hela den buktiga bottenytan. Hur många kvadratmeter kakel kommer det att krävas?

Om familjen har råd ska de vertikala bassängväggarna också få bli kakelklädda. Hur stort parti kakel måste köpas till?

Att bestämma hur många kvadratmeter som trädäcket kommer att uppta tror Perssons att de kan räkna ut själva, men det är nog bäst att du hjälper dem med det också.

När bassängen är färdig tar mamma Persson varje morgon en liten simtur. Hon hoppar i (eller kliver ner för badstegen) vid $(0, 4.5)$ och simmar i en sicksackbana via punkterna $(x_p,\, c(x_p))$, $(5,\, d(5))$, $(10 - x_p,\, c(10 - x_p))$ till bassängkanten vid $(10, 4.5)$ och sedan tillbaka längs samma bana. Hon stiger upp på samma ställe som hon hoppade i. Var ska markeringarna finnas för att hennes simtur ska bli så lång som möjligt?