Ordinära differentialekvationer - randvärdesproblem *NAM 8.7.2*

- Randvärdesproblem (RVP) - lösningen eller dess derivata är given på *ränderna*. Ett RVP skriver vi allmänt som

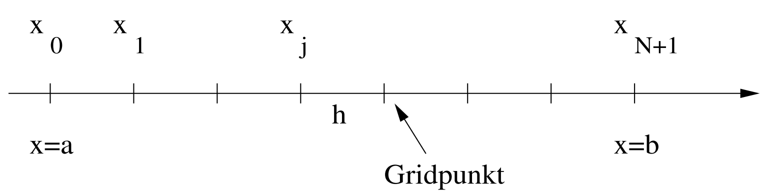
$$
\begin{aligned}
&y''(x) + q(x)y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \quad x \in (a,b) \\
&y(x=a) = \alpha \\
&y(x=b) = \beta
\end{aligned}
$$

- $g(x)$, $q(x)$ och $p(x)$ är givna funktioner.
- Här är $x = a$ och $x = b$ randpunkter.
- $y(a) = \alpha$ och $y(b) = \beta$ kallas randvärden.
- Hur löser vi ett randvärdesproblem numeriskt ?

Finita differensmetoden

Diskretisering

- Dela in intervallet $x = [a,b]$ i $N + 1$ stycken delintervall



- Gridpunkterna x_i ges av $x_i = a + ih$, där $i = 0, 1, 2 \ldots, N + 1$.
- h är steglängden och ges av $h = (b - a)/(N + 1)$.
- $x_i, i = 1, 2, 3, \ldots, N$ kallas inre (grid)punkter.
- $x_0 = a$ och $x_{N+1} = b$ kallas randpunkter.
- Låt gridfunktionen y_i vara en approximation av lösningen y till RVP i punkten x_i det vill säga $y_i \approx y(x_i)$.

Approximation

- Approximera derivatorna i en punkt x_i med differensapproximationer

$$
\begin{aligned}
y'(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} && \text{Central differens} \\
y''(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} && \text{Central differens}
\end{aligned}
$$

- En approximation av randvärdesproblemet i punkten x_i blir då

$$
\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + p(x_i)y_i = g(x_i)
$$

- Denna approximation gäller för alla de inre punkterna x_i när $i = 1, 2, \ldots N$

- I randpunkterna gäller

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \alpha \\
y_{N+1} &= \beta
\end{aligned}
$$

- Samla ihop termer

$$
\underbrace{\left(\frac{q(x_i)}{2h} + \frac{1}{h^2}\right)}_{b(x_i)} y_{i+1} + \underbrace{\left(p(x_i) - \frac{2}{h^2}\right)}_{a(x_i)} y_i + \underbrace{\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\right)}_{c(x_i)} y_{i-1} = g(x_i)
$$

För $i = 1, 2, \ldots N$ får vi nu

$$
\begin{aligned}
&i = 1 && b(x_1)y_2 + a(x_1)y_1 + c(x_1)y_0 = g(x_1) \\
&i = 2 && b(x_2)y_3 + a(x_2)y_2 + c(x_2)y_1 = g(x_2) \\
&\vdots \\
&i = N-1 && b(x_{N-1})y_N + a(x_{N-1})y_{N-1} + c(x_{N-1})y_{N-2} = g(x_{N-1}) \\
&i = N && b(x_N)y_{N+1} + a(x_N)y_N + c(x_N)y_{N-1} = g(x_N)
\end{aligned}
$$

- Notera att $y_0 = \alpha$ och $y_N = \beta$ är kända värden och flyttas över till högerledet i första och sista ekvationen.

- Detta är ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}$ som vi kan lösa för de N obekanta $y_1, y_2, \ldots, y_N$ definierade i de inre gridpunkterna, $x_i, i = 1, 2, 3\ldots, N$.

$$
\begin{pmatrix}
a(x_1) & b(x_1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
c(x_2) & a(x_2) & b(x_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & c(x_3) & a(x_3) & b(x_3) & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c(x_N) & a(x_N)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} g(x_1) - c(x_1)\alpha \\ g(x_2) \\ g(x_3) \\ \vdots \\ g(x_N) - b(x_N)\beta \end{pmatrix}
$$

- A en tridiagonal matris av storlek $N \times N$.
- Lösningen (den numeriska approximationen) i de inre punkterna $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ ges av $\boldsymbol{y} = A^{-1}\boldsymbol{f}$.
- Noggrannheten hos lösningen ges av noggrannhetsordningen hos derivata-approximationen. I det här fallet så är felet proportionellt mot h^2.

Exempel

Lös följande randvärdesproblem (A), B) och C)) med finita differensmetoden. Antag att intervallet i x-led delas in i $N+1$ lika stora delintervall av längd h. Diskretisera problemet med användning av lämpliga differensapproximationer och ställ upp det linjära ekvationssystem som definierar den numeriska lösningen.

A)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 3, \quad 0 \le x \le 3$$

Lösning: Dela in $x = [0, 3]$ i ett $N+1$ delintervall av längden h och låt $x_i = 0 + ih$ där $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$ och $h = 3/(N+1)$. Låt $y_i \approx y(x_i)$ och approximera ekvationen i de inre punkterna enligt

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 3\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 4y_i = x_i, \quad j = 1, 2, \dots, N$$
$$y_0 = 0 \quad y_{N+1} = 3$$

Samlar vi ihop termer så får vi

$$(1 + \frac{3h}{2})y_{i+1} + (4h^2 - 2)y_i + (1 - \frac{3h}{2})y_{i-1} = h^2 x_i$$

och det linjära ekvationssystemet blir

$$
\begin{pmatrix}
4h^2 - 2 & 1 + \frac{3h}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 - \frac{3h}{2} & 4h^2 - 2 & 1 + \frac{3h}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 - \frac{3h}{2} & 4h^2 - 2 & 1 + \frac{3h}{2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - \frac{3h}{2} & 4h^2 - 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} h^2 x_1 \\ h^2 x_2 \\ h^2 x_3 \\ \vdots \\ h^2 x_{N-1} \\ h^2 x_N - 3(1 + \frac{3h}{2}) \end{pmatrix}
$$

B)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 2, \quad 1 \le x \le 3$$

Lösning:

Dela in $x = [1, 3]$ i ett $N + 1$ delintervall av längden h och låt $x_i = 1 + ih$ där $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ och $h = 2/(N+1)$. Låt $y_i \approx y(x_i)$ och approximera ekvationen i de inre punkterna enligt

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_i}{x_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$
$$y_0 = 1 \quad y_{N+1} = 2$$

Samlar vi ihop termer så får vi

$$y_{i+1} - (2 + \frac{h^2}{x_i})y_i + y_{i-1} = 0$$

och det linjära ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} -(2+\frac{h^2}{x_1}) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -(2+\frac{h^2}{x_2}) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -(2+\frac{h^2}{x_3}) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -(2+\frac{h^2}{x_N}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

C)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (2 - 2x + x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(5) = 1, \quad 0 \le x \le 5$$

Dela här in $x = [0, 5]$ i 5 st delintervall (dvs N=4) av längden $h = 1$.

Lösning:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1 & 3.5 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$