

Numeriska metoder för OPEN, VT2009

Numerisk lösning av system av differentiationer och stabilitet

Tidigare

- Vill lösa

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

numeriskt.

- Dela in intervallet $I = [t_0, t_{slut}]$ i ett antal diskretiseringssteg, n , av längd $h = (t_{slut} - t_0)/n$. I varje punkt $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, approximerar vi lösningen $y_i \approx y(t_i)$.
- Euler framåt (Eulers metod)

$$y_{i+1} = y_i + hf_i, \quad f_i = f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Euler framåt är en *explicit metod*, vilket betyder att vi får värdet y_{i+1} direkt från tidigare beräknade värdet y_i .

- Euler bakåt

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}, \quad f_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

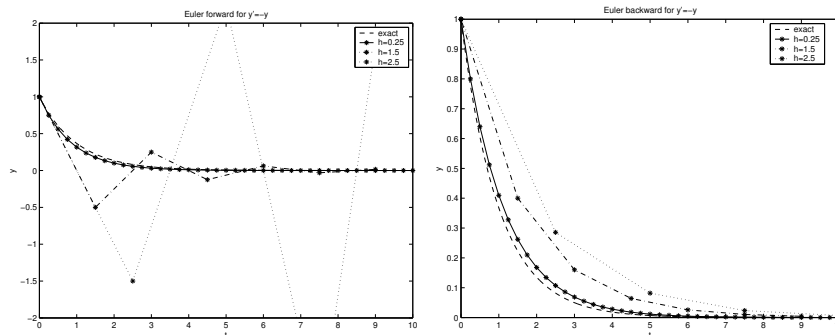
Euler bakåt är en *implicit metod*, dvs vi får y_{i+1} genom att lösa en ekvation.

- Exempel: $y' = -y$, $y(0) = 1$ (med exakt lösning $y = e^{-t}$).

Euler framåt: $y_{i+1} = y_i + h(-y_i) = (1 - h)y_i$, $y_0 = 1$.

Euler bakåt: $y_{i+1} = y_i + h(-y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i}{1+h}$, $y_0 = 1$.

- Numeriska resultat med olika steglängder h .



Figur 1: Vänster plot visar lösningen med Euler framåt, och höger plot för Euler bakåt.

- Den numeriska lösningen stämmer bättre med den exakta när vi har mindre steglängd h . Hur mycket förbättras lösningen när vi minskar $h \Leftrightarrow$ konvergensanalys. Vid vissa val av steglängder uppför sig lösningen helt fel (ex. med $h=2.5$ för Euler framåt ovan). Hur måste h väljas för en viss metod för att den numeriska lösningen ska uppföra sig korrekt $\Leftrightarrow$ stabilitetsanalys.

Stabilitetsanalys

- Betrakta modellproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t \in (0, \infty), \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

där λ är ett negativt reellt tal. Exakt lösning ges av $y(t) = e^{\lambda t}$, och då $\lambda < 0$ har vi $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

- Om den numeriska metoden ger $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$ så är den stabil. Detta ger olika stabilitetskrav på steglängden h för olika metoder.
- Ex. Euler framåt.

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda)y_i = (1 + h\lambda)^{i+1},$$

då $y_0 = 1$. Om

$$-1 < 1 + h\lambda < 1,$$

dvs. $h < 2/|\lambda|$, så har vi $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$, dvs. metoden är stabil. I exemplet ovan var $\lambda = -1$ och med $h = 2.5$ var inte lösningen avtagande. Däremot var lösningen fortfarande avtagande med Euler bakåt och $h = 2.5$ (men inte särskilt nära den exakta lösningen). Varför?

- Ex. Euler bakåt. $y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = y_n/(1 - h\lambda) \Rightarrow$

$$y_{i+1} = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^{i+1},$$

och då $\lambda < 0$ och $h > 0$ får vi att $y_{i+1} \rightarrow 0$ när $i \rightarrow \infty$ för alla $h > 0$.

- Egenskapen att implicita metoder ibland tillåter större steglängder h gör dem attraktiva trots att de kräver mer arbete i varje steg (om f icke linjär eller om vi löser ett system av differentialekvationer).

Högre ordningens differentialekvationer och system av differentialekvationer

- Vill lösa differentialekvation av ordning m

$$\begin{aligned} y^{(m)}(t) &= f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}), \quad t \in (t_0, T], \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}. \end{aligned}$$

- Ansätt

$$w_1(t) = y(t), \quad w_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad w_m(t) = y^{(m-1)}(t).$$

Vi har då $w'_1 = y' = w_2$, $w'_2 = y'' = w_3$, osv. vilket ger ett första ordningens system med m differentialekvationer.

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_2 \\ w'_2 &= w_3 \\ &\vdots \\ w'_{m-1} &= w_m \\ w'_m &= f(t, w_1, w_2, \dots, w_m) \end{aligned}$$

med begynnelsevillkor $w_1(t_0) = y_0$, $w_2(t_0) = y_1$, $\dots$, $w_m(t_0) = y_{m-1}$.

- Med $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ och $\mathbf{F}(t, \mathbf{w}) = (w_2, w_3, \dots, f(t, w_1, w_2, \dots, w_m))^T$ kan detta skrivas som

$$\mathbf{w}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{w})$$

- System av första ordningens differentialekvationer löses med samma metoder som för skalära problem (en differentialekvation).
- Ex. $y'' = -3y - 4y' + \sin(t)$, $y(0) = y'(0) = 1$ kan skrivas som

$$\begin{aligned}\mathbf{w}' &= \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ -3w_1 - 4w_2 + \sin(t) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(t, \mathbf{w}) \\ w_1(0) &= w_2(0) = 1.\end{aligned}$$

Med Euler framåt löses detta genom

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + h\mathbf{F}(t_i, \mathbf{w}_i)$$