

LABORATION 1

Ekvationslösning, kurvanpassning, interpolation och tillförlitlighet

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! (Målet med labben är ju att ni i fortsättningen skall kunna lösa liknande problem). Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor plottade, numeriska resultat noterade). Alla frågor i deluppgifterna ska kunna besvaras! Sista dag för bonuspoäng: se hemsidan!

-1. Kursregistrering i RAPP

Det är viktigt att du kursanmäler dig i Rapp, rapp.csc.kth.se. Logga in där med ditt KTH-id och klicka på *Aktivera*. (I RAPP kan du se rapporterade lab-bonuspoäng etc. Kolla under kursens gång att dina resultat rapporteras in.)

Om du inte redan gjort det (se Lab0): gör i ett terminalfönster `course join numo13` för att kunna få ytterligare kursinfo (inloggad på ditt CSC-konto). Det är också praktiskt när ni jobbar två och två, att koppla ihop ert arbete med numme-labbarna, se Lab0.

0. MÖ-uppgifterna (Redovisas EJ)

Om du vill öva på MATLAB gör "Lab0" och/eller "Inledande laboration : bekanta dig med MATLAB", som båda finns på hemsidan.

Arbeta igenom så många som möjligt av MÖ-uppgifterna men prioritera uppgifterna 1-5 och 9-12. Du hittar MÖ-uppgifterna på kurshemsidan.

Om du tycker att det tar alltför lång tid nu att göra allihop, kan du hoppa över några nu. Men gå i så fall tillbaka och titta på de resterande MÖ-uppgifterna senare! Totalt sett sparar du tid på att göra dem.

1. Linjärt ekvationssystem

Lös det linjära ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i MATLAB:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beräkna i MATLAB residualvektorn $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}$.

Notera svaret nedan. Varför blir inte residualvektorn exakt lika med noll?

Lösning samt svar:

2. Icke-linjär skalär ekvation med Newtons metod

Bestäm de två positiva rötterna till ekvationen:

$$f(x) = 80x - \left(\frac{x^2 + x + 0.1}{x + 1} \right)^5 + 2xe^{-x} = 0$$

Rötterna ska bestämmas med RELATIVFEL mindre än 10^{-6} . Skriv ett MATLAB-program som använder Newtons metod. Rita först funktionen $f(x)$ i två delfönster. I första delfönstret ritas $f(x)$ på ett intervall $[0, a]$ där a väljs så att man tydligt ser var den mindre av de två rötterna ligger. I det andra delfönstret ritas $f(x)$ på ett större intervall $[0, A]$ så att man tydligt ser var den större av de två rötterna ligger. Använd subplotkommandot `subplot(2,1,j)` för att rita i det j-te delfönstret. Bägge graferna ska ha lämplig rubrik. Skriv ut plotbilden på papper.

Skriv också ut så mycket mellanresultat att du kan besvara följande frågor:

- a) Vilka är rötterna?
- b) Hur ser vi kvadratisk konvergens?
- c) Hur uppskattar du relativfelet i dina beräknade nollställe-approximationer?
- d) Frivillig: Har funktionen några negativa rötter? I så fall, grovlokalisera dem.

3. Samma icke-linjära skalära ekvation med sekantmetoden

Bestäm de två positiva rötterna till ekvationen i föregående uppgift med sekantmetoden.

- a) Vad blev rötterna? Är det samma värden?
- b) Har du snabb konvergens? Kvadratisk?
- c) Vilken av metoderna föredrar du? Varför?

Uppgift 1 och 2 och 3 godkända (datum, lärarsign):

4. Dagens längd i Stockholm

Tabellen nedan anger dagens längd i Stockholm den första dagen i varje månad under sommarhalvåret (tiden är angiven decimalt):

Månad:	1 april	1 maj	1 juni	1 juli	1 aug	1 sep
Dagnr :	91	121	152	182	213	244
Solen uppe:	13.1	15.8	18.0	18.5	16.7	14.1

- a) Plotta de sex punkterna. Det gäller nu att anpassa ett andragradspolynom till dem med minstakvadratmetoden. Hur lyder normalekvationerna och hur många rader och kolumner har matrisen i normalekvationerna i detta fall?

Beräkna polynomets koefficienter och rita polynomkurvan med tät indelning, minst dagligen, från vårdagjämningen dag 80 till höstdagjämningen dag 265.

Hur länge är solen uppe på nationaldagen den 6 juni enligt denna modell?

Beräkna och plotta residualkurvan för de 6 tabellvärdena. Beräkna felkvadratsumman (dvs normen av residualen i kvadrat).

Hur länge skulle solen vara uppe på julafton enligt denna modell?

- b) Tabellen kompletteras med vinterhalvårets värden:

Månad:	1 jan	1 feb	1 mars	1 okt	1 nov	1 dec
Dagnr :	1	32	60	274	305	335
Solen uppe:	6.1	8.0	10.4	11.4	8.7	6.6

Markera de tolv punkterna i en figur. Anpassa ett andragradspolynom till samtliga de tolv värdena. Beräkna polynomets koefficienter och rita polynomkurvan med tät indelning, minst dagligen, för hela året, dvs från dag 1 till dag 365.

Beräkna och plotta residualkurvan för de 12 tabellvärdena. Beräkna felkvadratsumman (dvs normen av residualen i kvadrat) samt nationaldagens och julaftons soltid enligt denna modell. Jämför med resultatet från förra deluppgiften. Blev det bättre?

- c) Låt tabellen ha hela årets värden: Markera de tolv punkterna i en figur. Ett trigonometriskt uttryck med perioden $T = 365$ bör kunna ge god anpassning:

$$F(t) = c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t, \text{ där } \omega = 2\pi/T.$$

Undersök detta och rita kurvresultatet (dagligen från nyårsdagen till dag 365) tillsammans med givna data. Rita också residualkurvan (residualvektorns tolv komponenter) mot de tolv givna dagnumren. Beräkna felkvadratsumman samt nationaldagens soltid enligt denna modell.

- d) Frivillig: Kan du föreslå en ännu bättre modell?

5. Dagens längd i Stockholm - igen

Givet tabellen för hela året i föregående uppgift. Vi skall nu prova fyra olika typer av interpolation genom tabelldata.

- a) Styckvis linjär interpolation
- b) Interpolation med ETT polynom av lämpligt gradtal
- c) Splineinterpolation
- d) Styckvis kubisk Hermiteinterpolation

Tips: I uppgift a behöver endast `plot` användas för kurvan! För de övriga deluppgifterna används med fördel funktioner som finns i MATLAB-biblioteket: `polyfit`, `polyval`, `spline` och `pchip`. För att se hur de anropas, använd `help`.

Gör nu följande för samtliga interpolationsalternativ:

Plotta mätvärdena (12 styck) och resultatet av interpolationen för året. Beräkna och plotta vad respektive interpolation ger för soltid för nationaldagen och julafton. Alla grafer ska ha lämplig rubrik samt variabelbeteckningar på axlarna. Rita kurvor för hela året samt beräkna soltiden för nationaldagen samt julafton med alla kurvorna.

Tips: Välj mellan att plotta i fyra delfönster med hjälp av `subplot` eller att plotta alla kurvor i samma bild. Välj det du tycker visar likheter och skillnader tydligast. (eller både och!)

Uppgift 4 och 5 godkända (datum, lärarsign):

6. Hitta bästa cirkel till givna punkter

- a) Sex punkter är givna: $(3, 1)$, $(-2, 3)$, $(-1, 5)$, $(2, 5)$, $(-1, 0)$, $(1, -1)$ och vi vill finna den enligt minsta kvadratmetoden bäst anpassande cirkeln.

Lös med minstakvadratmetoden det linjära överbestämda ekvationssystem som erhålls då cirkelns ekvation skrivs enligt MÖ 12: $c_1 + c_2x + c_3y = x^2 + y^2$.

Härled (med papper och penna) denna linjära formel ur cirkelns vanliga ekvation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ och ange uttrycket för radien och mittpunktens koordinater som funktion av c_1 , c_2 och c_3 (*redovisas!*). Rita upp punkterna och cirkeln.

- b) Utnyttja grafisk inmatning (se MÖ 9) och klicka tio punkter ungefärligen runt en cirkel. Beräkna och rita bästa cirkel tillsammans med de tio punkterna. Om programmet i a) skrivits på ett bra sätt är detta en enkel modifikation av det programmet.

7. Tillförlitlighet

Antag att konstanten som ges som 80 i ekvationen i uppgift 2 kan variera $\pm 1\%$. Hur mycket påverkas de båda positiva rötterna? (Svara tex i procent). Påverkas båda rötterna lika mycket?

Laboration 1 i numo13 redovisad och helt klar!

Datum:

Laborant

Godkänd av