

Lab2 Integraler, differentialekvationer, ekvationssystem

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: se hemsidan.

1. Numerisk integration: rotationssymmetrisk lur

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x -axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2 dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.5$. Börja med trapetsregeln med några olika steglängder. Följ gärna upp med Richardson-extrapolation. Hur många siffror verkar tillförlitliga? Ange din beräknade volym med felgräns.

Pröva sedan MATLABS `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt x och f vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor $\mathbf{fi}$ för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser X , Y och Z :

$$X = x \cdot \text{ones}(\text{size}(\mathbf{fi})); \quad Y = f \cdot \cos(\mathbf{fi}); \quad Z = f \cdot \sin(\mathbf{fi});$$

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur.

2. Integral med förbehandling. Integralen

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

ska beräknas numeriskt med totalt fel mindre än 10^{-6} . Genomför först en analytisk förbehandling så att det transformerade problemet enkelt kan lösas numeriskt. Ledning: 1) undersök vilket värde integranden får för $x = 0$

2) Gör "svanskapning" för att bestämma vilket ändligt intervall $[0, N]$ som behövs för att bidraget från "svansen" ska bli tillräckligt liten.

Redovisa både integralvärdet och den analytiska förbehandlingen!

Deluppgift 1 och 2 godkända (datum, lärarsign):

3. Differentialekvationer - begynnelsevärdesproblem

Givet är differentialekvationsproblemet

$$y'' + \pi y e^{x/3} (2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/3.$$

Skriv om differentialekvationen till ett system av första ordningens ODE. Utnyttja MATLABS `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.5$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6} .

Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

Om man utöver det erhållna systemet inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer.

Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen, dvs vad svarar u_3 mot? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.5$. Verkar det bekant?

Lös även uppgiften med `ode45`'s inbyggda default-tolerans 10^{-3} .

4. Differentialekvationer – Randvärdesproblem

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L .

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \quad (1)$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L . $k(x)$ är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att $L = 2.4$ [m], $T_0 = 350$ [K], $T_L = 450$ [K] samt att $k(x)$ [J/(K · m · s)], och $Q(x)$ [J/(s · m³)] är funktionerna

$$k(x) = 3 + x/5 \quad Q(x) = 310 e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$, där $h \cdot n = L$, sätter $y(x_i) \approx y_i$ och approximerar andraderivatans med centraldifferens erhålles ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \quad (4)$$

där A är en matris, T är en vektor med temperaturvärden i och b är en vektor som beror av $Q(x_i)$ -värdena samt temperaturen i stavens ändpunkter.

a) Skriv ner matrisen A och vektorerna T och b för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

$$\text{Ledning: } \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet och räknar ut temperaturen T i punkten $x = 2$ med 4 säkra decimaler. (Glöm inte att visa vad du gjort som gör att du vågar lita på dina 4 decimaler.)

Plotta också temperaturen som funktion av x på hela intervallet $0 \leq x \leq L$.

Tar programmet lång tid att köra? Här är två tips för snabbare program:

- Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Kommandot `sparse` är ett kommando för att skapa glesa matriser eller för att tala om för Matlab att matrisen kan lagras glest. MATLAB-satsen `A=sparse(A)` ändrar till gles lagring i Matlab.

- Hur mycket skall felet minska då steglängden halveras? Gör det i ditt program?

c) Om man vill undersöka temperaturen i $x = 1.98$ vilket är det minsta antal delar man bör använda då?

d) Varför är det lite svårare att med 4 säkra decimaler skatta maximala temperaturen i staven än temperaturen i $x = 2$?

e) Frivillig: Skatta maximala temperaturen i staven med 4 säkra decimaler.

5. Skärning mellan ellipser, ickelinjärt ekvationssystem

a) Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av

$$x^2 + \frac{3y^2}{5} - \frac{xy}{2} = 13$$

och den ellips med centrum i $(6, 3)$ och halvaxlarna $a = 7$ och $b = 4$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

$$\frac{(x-6)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1.$$

Skärningspunkterna skall ha minst 5 korrekta decimaler. Ellipserna ska ritas och de erhållna skärningspunkterna markeras med ringar. (Tips: Den sneda ellipsen kan skrivas som två "halvor".)

b) Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm? Skriv ut tabell som visar kvadratisk konvergens.

c) I ett allmänt fall, hur många skärningspunkter finns det mellan en sned ellips och en "icke-sned" ellips?

Hela Lab2 redovisad

Datum:

Godkänd av:

Namn: