CSC, NADA, KTH

Lösning till DN1215 Numeriska Metoder för Mikroelektronik
Fredagen den 13/3 2009 kl 15-18

P1. Inför $\mathbf{z} = (x, y)^T$ och skriv

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 10x + x^3 - y + 0.1xy - 1, \\ x + 10y + y^3 - 0.5 \end{pmatrix} = 0$$

Newtons metod lyder

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n + \mathbf{d}_n \quad \text{där} \quad J(\mathbf{z}_n)\mathbf{d}_n = -\mathbf{f}(\mathbf{z}_n)$$

med $J(\mathbf{z}_n)$ Jakobianen till $\mathbf{f}(\mathbf{z}_n)$, dvs

$$J(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 10 + 3x^2 + 0.1y & 0.1x \\ 1 & 10 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen med Newtons metod är

$$J(\mathbf{z}_0)\mathbf{d}_0 = -\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) \quad \text{där} \quad \mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

Startgissningen får vi genom att anta att x och y är små, så vi kan ersätta första ekvationen med $10x = 1$, och andra ekvationen med $10y = 0.5$.

Med siffervärdena insatta får vi

$$J(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} 10.035 & 0.01 \\ 1 & 10.0075 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} 0.001 - 0.05 + 0.0005 \\ 0.1 + 0.05^3 \end{pmatrix}$$

```
z=[0.1; 0.05]; dz=z;
iter =0;
while norm(dz,inf)>1.E-7 && iter <10
  x=z(1); y=z(2);
  f=[10*x+x^3-y+0.1*x*y-1; x+10*y+y^2-0.5];
  J=[10+3*x^2+0.1*y   0.1*x
     1             10+3*y^2  ];
  dz=-J\f;
  disp([z f dz])
  z=z+dz; iter=iter+1;
end
x
```

Felet skattas med normen av den sista korrektionen `dz`.

P2. Vi börjar med att skriva om problemet till ett system av första ordningen. Inför $u_1 = u, u_2 = u'$ så får vi systemet

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_2, \\ sin(4t) - 3u_2 - \alpha u_1 \end{pmatrix}$$

Vi skriver en Matlabfunktion för högerledet

```
function f=fodep2(t,u);
global alpha
f= [u(2)
    sin(4*t)-3*u(2)-alpha*u(1)];
```

Observera att vi vill lösa problemet för flera olika värden på α så vi har infört den globala variabeln `alpha`. Huvudprogrammet blir

```
global alpha
u0=[1;0.2]; tabell=[];
for alpha=[0.5 1 2 3 5]
  [T U]=ode45(@fodep2,[0 10],u0);
  tabell=[tabell; alpha U(end,1)];
  plot(T,U(:,1)); if alpha==0.5 hold on;
end
tabell
```

P3
```
v=[30;50;70;90]; y=[11;23;48;72];
v2=0; v3=0;
for i=1:4,
  v2=v2+v(i)^2;   v3=v3+v(i)^3;
end
m=v3/v2;
A=[v v.^2-m*v];
x=A\v

vp=30:1:100;
yp=x(1)*vp+x(2)*(vp.^2-m*vp);
plot(vp,yp,v,y,'o')
```

P4 För $h = 1$ får vi följande diskretisering av området

```
0     1     2     3     4
|-----|-----|-----|-----|
x     x     x     x     x
 1     2     3     4     5

y     y     y     y     y
 1     2     3     4     5
```

I differentialekvationen diskretiserar vi dy/dx med en framåtdifferens och kan ställa upp approximationer i punkterna x_1, x_2, x_3, x_4. Detta ger

$$\frac{y_2 - y_1}{h} - 1 - x_1 - y_1 = 0$$

$$\frac{y_3 - y_2}{h} - 1 - x_2 - y_2 = 0$$

$$\frac{y_4 - y_3}{h} - 1 - x_3 - y_3 = 0$$

$$\frac{y_5 - y_4}{h} - 1 - x_4 - y_4 = 0$$

Till detta kommer randvillkoret

$$y_1 + 2y_5 - 7 = 0$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} -1/h - 1 & 1/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/h - 1 & 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/h - 1 & 1/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/h - 1 & 1/h \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 \\ 1 + x_2 \\ 1 + x_3 \\ 1 + x_4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Som synes har vi fem ekvationer och fem obekanta. I det generella fallet har vi $N + 1$ ekvationer och lika många obekanta.