

Lösning till del 2 av tentamen i DN1241 med flera, lördag 24 okt 2009 14-17

1. Rekordpumpa

a) Använd Newtons ansats för tredjegradspolynommet:

$$P(x) = c_1 + c_2(x - 2005) + c_3(x - 2005)(x - 2006) + c_4(x - 2005)(x - 2006)(x - 2008)$$

$$P(2005) = 200 = c_1,$$

$$P(2006) = 208 = 200 + c_2 \cdot 1 \text{ ger } c_2 = 8.$$

$$P(2008) = 254 = 200 + 8 \cdot 3 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \text{ ger } c_3 = 30/6 = 5.$$

$$P(2009) = 286 = 200 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + c_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \text{ ger } c_4 = -6/12 = -0.5.$$

$$P(x) = 200 + 8(x - 2005) + 5(x - 2005)(x - 2006) - 0.5(x - 2005)(x - 2006)(x - 2008)$$

År 2007 blir rekordpumpans vikt $200 + 16 + 10 + 1 = 227$ kg.

%b) Naiv ansats: $P=c_1+c_2*x+c_3*x^2+c_4*x^3$

$x=[2005 \ 2006 \ 2008 \ 2009]'$; $y=[200 \ 208 \ 254 \ 286]'$;

$A=[\text{ones}(4,1) \ x \ x.^2 \ x.^3]$; $c=A \setminus y$;

$X=(2004:2010)$;

$P=c(1)+c(2)*X+c(3)*X.^2+c(4)*X.^3$; $\text{plot}(x,y,'o', X,P)$

2. Släpptest för pumpor

a) Finitadifferensmetoden i 8 delintervall med $h = 3.2/8 = 0.4$ innebär 7 obekanta $y_1, y_2, \dots, y_7$ vid $t_i = i \cdot h$ för $i = 1, 2, \dots, 7$. Vi känner $y_0 = 1, y_8 = 0$.

$y_i'' + t_i y_i' + 3y_i = 4 \cos(2\pi t_i)$. Ersätt derivatorna y_i'' och y_i' med differenskvoter.

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 + t_i(y_{i+1} - y_{i-1})/2h + 3y_i = 4 \cos(2\pi t_i).$$

Multiplikering med h^2 och sortering av de obekanta ger

$$(1 - ht_i/2)y_{i-1} - (2 - 3h^2)y_i + (1 + ht_i/2)y_{i+1} = 4h^2 \cos(2\pi t_i) \text{ för } i = 1, 2, \dots, 7,$$

alltså sju ekvationer. Första och sjunde ekvationen studeras närmare:

$$i = 1: -(2 - 3h^2)y_1 + (1 + ht_1/2)y_2 = 4h^2 \cos(2\pi t_1) - (1 - ht_1/2) \cdot 1.$$

$$i = 7: (1 - ht_7/2)y_6 - (2 - 3h^2)y_7 = 4h^2 \cos(2\pi t_7).$$

Det ger ett tridiagonalt ekvationssystem med alla diagonalelement $-(2 - 3h^2)$,

superdiagonalelementen är $1 + ht_1/2, 1 + ht_2/2, \dots, 1 + ht_6/2$ och

subdiagonalelementen är: $1 - ht_2/2, 1 - ht_3/2, \dots, 1 - ht_7/2$.

Högerledets första element är $4h^2 \cos(2\pi t_1) - (1 - ht_1/2)$, de övriga är $4h^2 \cos(2\pi t_i)$ för $i = 2, 3, \dots, 7$. Lösning av det linjära ekvationssystemet (gärna med tridia) ger de sju y -värdena.

Eftersom differenskvotens derivator approximerats med differenskvoter med felet prop mot h^2 behövs en fin indelning för att god noggrannhet ska erhållas. Därför bör beräkningarna göras om med dubbelt så många intervall, och därmed halverat steg h .

% b) Beräkna och skriv ut fallprovskurvorna för $N=8$ och $N=16$:

$N=8$; $m='r'$;

for koll=1:2

$h=3.2/N$; $n=N-1$; $t=h*(1:n)'$;

$\text{dia} = -(2-3*h^2)*\text{ones}(\text{size}(t))$;

$\text{sup}=1+h/2*t(1:n-1)$;

$\text{sub}=1-h/2*t(2:n)$;

$b=4*h^2*\cos(2*pi*t)$; $b(1)=b(1)-(1-h/2*t(1))*1$;

$\text{yy}=\text{tridia}(\text{dia},\text{sup},\text{sub},b)$;

$\text{tt}=[0;t;3.2]$; $\text{yy}=[1;\text{yy};0]$;

$\text{plot}(\text{tt},\text{yy},m(\text{koll}))$, hold on

$N=2*N$;

end

$\text{plot}([0 \ 3.2],[0 \ 0])$, axis tight, xlabel('tid i sekunder')

3. Spökpumpor av Cassiniovaler

Cassiniovalens ekvation: $(x^2 + y^2 + a^2 + b^2)^2 - 4(ax + by)^2 = q^2$.

Sex punkter är givna och tre obekanta a , b , q . Det blir ett överbestämt icke linjärt ekvationssystem $(x_i^2 + y_i^2 + a^2 + b^2)^2 - 4(ax_i + by_i)^2 - q^2 \approx 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$ för att bestämma parametrarna. Använd Gauss-Newtons metod. Startgissning för a och b får man ur tentalydelsens figur (med hjälp av de plusmarkerade punkterna på spökpumpen): $a \approx 2$ och $b \approx 5$; vi vet att $q \approx 30$.

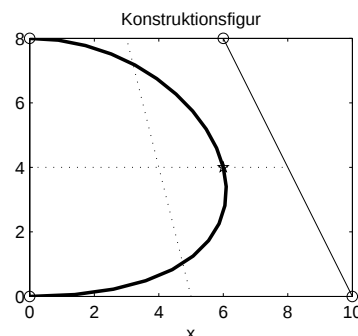
Jacobianen J blir en 6×3 matris; det innebär att minstakvadratmetoden utnyttjas i matlabs ekvationssystemlösning (fast det ju inte syns i satsen $dc = -J \backslash f$).

```
% Spökpumpa, Cassini-oval till givna punkter
x=[0 2 4 4 2 0]';
y=[-6.0 -0.2 1.7 6.4 7.0 6.4]';
a=2; b=5; q=30;
for i=1:5
    z=x.^2+y.^2+a^2+b^2;
    u=a*x+b*y;
    f=z.^2-4*u.^2-q^2; fnorm=norm(f)
    J=[4*z*a-8*u.*x 4*z*b-8*u.*y -2*q*ones(size(x))];
    dc=-J\f; % minstakvadratmetodlösning
    a=a+dc(1); b=b+dc(2); q=q+dc(3);
end
a,b,q % Resultat: a=2.2941, b=4.6599, q=30.4426
```

4. Halloweenpumpa 2009

a) Bézierkurvan startar i origo och slutar på z -axeln på höjden 8. Start- och slutriktning är horisontella, nedre styrpunktsavståndet är 10 och det övre är 6.

Konstruktionsfigur för pumpakonturen visas här. $r(1/2) = (6, 4)$ och lutningen där är lika med lutningen k för linjen mellan punkten $(3, 8)$ och $(5, 0)$; alltså $k = (8 - 0)/(3 - 5) = -4$.



% b) Uppritning av bezierkurvan

```
p1=[0 0]; p2=[0 8]; b=[10 0]; c=[6 8];
pbcp=[p1; b; c; p2];
t=(0:0.05:1)';
r=[(1-t).^3 3*t.*(1-t).^2 3*t.^2.*(1-t) t.^3]*pbcp;
x=r(:,1); z=r(:,2);
plot(x,z, 'LineWidth',2), axis equal
```