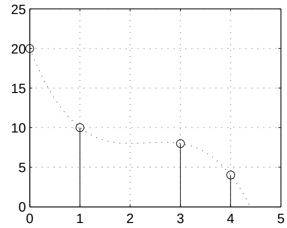
Tentamen i DN1240, Numeriska metoder gk, lör 10 jan 2009 10-13
(gäller också för alla andra grundkurser i numeriska metoder)

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40 A.

1. *Vad finns bakom fläcken?*

Man ska anlägga en hoppbacke i en sluttning och har mätt in fem punkter (i lämplig skalning). En kaffefläck har råkat utplåna det mittersta värdet.

x	0	1	2	3	4
y	20	10	♣	8	4



Rekonstruera det genom att lägga ett tredjegradspolynom genom de övriga punkterna.

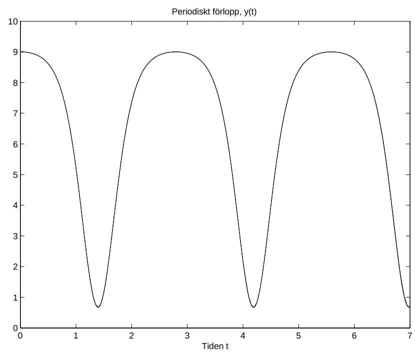
(6p) **a)** Använd en smart ansats och handräkna fram polynomkoefficienterna och det saknade y-värdet bakom fläcken.

(6p) **b)** Använd naiva ansatsen (se baksidan) och visa en algoritm som beräknar och ritar upp tredjegradspolynomet.

2. *Pulser i en jämn ström*

Figuren visar lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d^3y}{dt^3} = 8(y - 2\pi)\,\frac{dy}{dt}$$

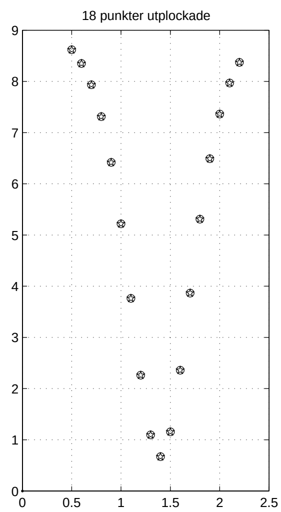


med $y(0) = 9,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2.$

(12p) Omforma till ett system av första ordningens ODE och skriv en algoritm som med rungekuttametoden RK4 (se baksidan) och steget $h = 0.05$ beräknar och ritar upp lösningskurvan i intervallet $0 \le t \le 7$.

3. *Approximerande gaussklocka*

Vi vill undersöka hur väl lösningskurvan i uppgift 2 kan approximeras av en uppochnedvänd gaussklocka (normalfördelningskurva) i intervallet $0.5 \le t \le 2.2$. Därför ansätter vi en modellfunktion på formen



$$F(t) = a + b\,e^{-c\,(t-\mu)^2}.$$

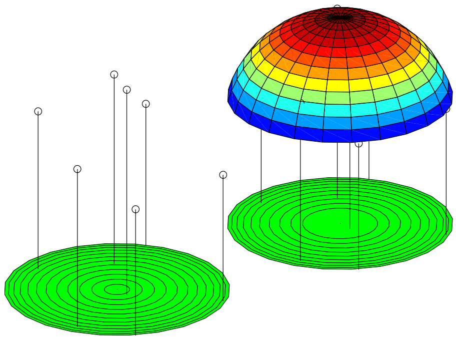
Till vårt förfogande finns 18 y-värden $y_1, y_2, ..., y_{18}$ från den numeriska diffekvationslösningen för t=0.5, 0.6,...,2.2.

(14p) Det gäller att bestämma de fyra parametrarna i modellen så att avvikelsen mellan givna data och modell minimeras i minstakvadratmetodens mening. Beskriv så fullständigt som möjligt en algoritm som beräknar parametervärdena och ritar den erhållna modellkurvan. Värdet på c är cirka 5; startgissningar till övriga parametrar erhålls ur figuren.

4. *Takkupolen*

En kupol med sfärisk välvning ska så bra som möjligt anpassas till följande mätpunkter:

x	5	7	8	10	12	14	15
y	5	2	13	7	11	3	12
z	10	8	10	13	12	8	9



Takkupolen bestäms av det sfäriska uttrycket

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

(12p) Skriv en algoritm för lösning av detta modellanpassningsproblem.

Pluspoäng för den som har tid över: Skriv matlabkod för uppritning av takkupolen (figurens kupol uppfyller $0 \leq \theta \leq 75^o$).

Utdrag ur formelsamlingen:

- - -

Det $(n-1)$-gradspolynom som går genom n givna punkter bestäms med *naiva ansatsen* $P(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ (ger fyllt system) eller bättre med *Newtons ansats* $P(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$, som ger triangulärt system.

- - -

Runge–Kutta–metoder gör flera funktionsberäkningar i varje steg och får därigenom hög noggrannhet. Mest känd är fjärde ordningens rungekutta (*RK4*) med felutvecklingen $c_4h^4 + c_5h^5 + \cdots$, och den lyder $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h(\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4)/6$, där $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(t_i + h/2, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_1/2)$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}(t_i + h/2, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_2/2)$, $\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_3)$.