

Tillägg till Tilnum-kompendiet avsnitt 3.2

3.2X Sherman-Morrison 2 (SM2)

Förutom Sherman-Morrisons blockmatrisalgoritm (nu kallad SM1) i TK 3.2 finns följande Sherman-Morrisonformel (SM2):

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

Vi ska se hur den kan användas för effektiv lösning av ett linjärt ekvations-system $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{y}$ där $\mathbf{B}$ är en matris som är tridiagonal i grunden med alla diagonalelement lika med 4 och med ettor överallt i super- och subdiagonalen men dessutom har elementen $B_{1,n} = 1$ och $B_{n,1} = 1$ (matrisen i TK 3.4).

För att kunna använda SM2 måste vi kunna skriva matrisen $\mathbf{B}$ på formen $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, där $\mathbf{A}$ är tridiagonal matris och resten uppfyller kravet att vara en produkt av en kolumnvektor $\mathbf{u}$ och en radvektor $\mathbf{v}^T$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den sista matrisen är $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1)$. I detta exempel är alltså

vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ lika.

Lösningen till ekvationssystemet $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{y}$ kan skrivas

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

Inför $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ och $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$. Eftersom $\mathbf{A}$ är tridiagonal erhålls både $\mathbf{x}$ och $\mathbf{w}$ med anrop av tridia. Med de nya beteckningarna kan $\mathbf{x}_B$ skrivas

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{w}\mathbf{v}^T\mathbf{x}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{w}} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{x}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{w}}\mathbf{w}$$

I vårt exempel är skalärprodukterna enkla att beräkna: $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = x_1 + x_n$ och $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = w_1 + w_n$.

Precis som i SM1 är det två tridia-beräkningar som gör grovarbetet i denna effektiva algoritm. Se tillämpningen i kurskatalogfilen `shermmorris.m`.