

Gerd Eriksson

Mars 2009

DN2220, Tillämpade numeriska metoder I

Urval av PDE-projekt 2009

- 1. Kylning av kristallkula
- 2. P-skivan med potentialer och egensvängningar
- 3. Rostbiff och inbakad oxfilé
- 4. Biffrulle och julskinka
- 6. Signal propagation in a long wire
- 7. Apriltemperaturvariationer i marken
- 8. Solitonvågor
- 9. Glace au four (svensk och engelsk version)
- 10. Värmeutveckling i bromsskiva på bil
- 12. Sfäriskt akvarium med förgiftad gulfisk
- 13. Roterande vätska i burk och tekopp
- 15. Oren Rhen – smutsspridning
- 17. Vinklad vägledare
- 18. Metallblock med värmekälla och termometer

- **1. Kylning av kristallkula**

Vid tillverkning av kristallglas är nedkylningen problematisk. Snabb kylning önskas av kostnadsskäl, men sker den för snabbt orsakas sprickbildning på grund av stora temperaturskillnader i godset. En kristallkula med radien R ska kylas från 750°C till rumstemperatur. Temperatursänkningen i ugnen sker kontrollerat och beror av den på förhand inställda tidsparametern T , så att ugnstemperaturen från tiden $t = 0$ till tiden T följer formeln $f(t) = 750e^{-3.6t/T}$. För $t > T$ gäller $f(t) = 750e^{-3.6} = 20.5$, alltså normal rumstemperatur.

Värmeledningsekvationen för en homogen sfär lyder:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}, \quad 0 < r \leq R, \quad t > 0.$$

Den termiska diffusiviteten för kristallglas är $\beta = 4.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sekund}$.

Vid $r = 0$ gäller randvillkoret $\partial u / \partial r = 0$, vilket leder till att värmeledningsekvationen vid denna rand uppfyller $\partial u / \partial t = 3\beta \partial^2 u / \partial r^2$ (härled detta).

Randvillkoret vid $r = R$ är $u(R, t) = f(t)$. Då kylningen startar har hela kulan temperaturen 750°C .

Av speciellt intresse är temperaturgradienten i r -led – glaset kan spricka om $|\partial u / \partial r|$ är för stort. För vårt kristallglas riskeras sprickbildning om värdet vid något tillfälle överstiger $55^\circ\text{C}/\text{cm}$ (dvs $5500^\circ\text{C}/\text{m}$), vilket inträffar om kylningen sker för snabbt. Experimentera dig fram till minsta tillåtna värde på kyltidsparametern T i fyra fall, nämligen för kristallglaskulor med diameter på 5, 10, 15 och 20 cm.

Beräkna temperaturen $u(r, t)$ i glaskulan från tiden $t = 0$ fram till dess att kulans yta svalnat till rumstemperatur.

Pröva diskretisering med 100 intervall i radiell led. Ta litet tidssteg (t ex 10 eller 15 sekunders steg) under första timmens kylning. Därefter kan tidssteget ökas. Experimentera med andra rumssteg och tidssteg för att förvissa dig om att resultatet får acceptabel noggrannhet.

Åskådliggör resultaten grafiskt.

- **2. P-skivan, ett potential- och egensvängningsproblem**

Inom ett P-format område enligt figuren bestäms potentialfördelningen $u(x, y)$ av en elliptisk partiell differentialekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z(x, y) u = 0$$

där $z(x, y)$ är en funktion med en parameter som kan varieras. P-skivan har bredden 7 längdenheter och längden 10.

Potentialen har det konstanta värdet 100 både på vänstra randen (vid $x = 0$) och på nedersta randen där $y = 10$ (y -axeln pekar nedåt).

Längs den övre randen (x -axeln) avtar u linjärt från 100 (i origo) till 0 där 45° -linjen börjar (vid $x = 5$). Längs det vertikala partiet nedtill (där $x = 3$) varierar u linjärt från 0 i hörnet med koordinaterna (3, 6) till värdet 100 vid $y = 10$. Vid de övriga ytterkonturpartierna gäller $u = 0$.

I P-formens kvadratiske hålrum gäller också $u = 100$.

Funktionen $z(x, y)$ bestäms av uttrycket $z(x, y) = K/(5 + (x - 3)^2 + (y - 6)^2)$ där K är en parameter som får anta värden i intervallet $-10 \leq K \leq 8$.

Fallet $K = 0$ är vanliga Laplaces ekvation.

För att bestämma de obekanta potentialvärdena med finitadifferensmetoden för givet parametervärde K krävs lösning av ett stort glest ekvationssystem. Prova tre rumssteg först $h = 0.5$ som figuren visar, därefter $h = 0.25$ och $h = 0.125$. Utnyttja `contour` för att få ekvipotentialkurvor uppritade vid det finmaskigaste gittret.

I kontrollpunkten (1.5, 6) vill man känna till potentialvärdet och veta hur tillförlitligt det är. Notera därför u -värdet för de tre steglängderna och richardsonextrapolera för att få ett mer noggrant resultat.

Lös potentialproblemet för olika K -värden. Vilket parametervärde K ger potentialvärdet 50 i kontrollpunkten, och vilket K ger potentialen 200 där?

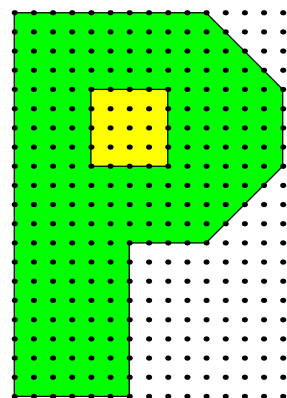
Närbesläktat med differentialekvationsproblemet är egensvängningsproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z(x, y) u + \omega^2 u = 0$$

med homogena randvillkor, dvs $u = 0$ överallt längs randen. Genom FDM kan det omformas till ett matrisegenvärdesproblem. Detta ger en approximativ lösning till det givna problemet. Med tät diskretisering erhålls egenfrekvenserna ω med god precision.

Bestäm de fem lägsta egenfrekvenserna och rita tillhörande egensvängningsmoder med `contour`. Gör en bedömning av antalet korrekta siffror i de erhållna ω -värdena. Vilken påverkan har parametern K på egenfrekvenserna och egenmodernas utseende?

Område med gitterpunkter



• **3. Rostbiff och inbakad oxfilé (1D-modell)**

Betrakta en rostbiff formad som en långsträckt cylinder med diametern tio cm. Köttet har temperaturen 10°C när det stoppas in i ugnen som håller konstant temperatur 175° . Det gäller för oss att beräkna hur lång tid det tar för rostbiffen att bli färdig. I matrecept anses det att köttet ska tas ur ugnen när temperaturen i mitten uppnått 60° . Därefter stiger temperaturen i det inre ytterligare på grund av värmeutjämning; hur många grader det rör sig om ska också utredas.

Värmeledningsekvationen för en cylinder med enbart radiellt beroende (alltså betraktad som oändligt lång) lyder:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r \leq R, \quad t \geq 0.$$

Vid $r = 0$ finns randvillkoret $\partial u / \partial r = 0$. Visa att differentialekvationen vid $r = 0$ övergår till $\partial u / \partial t = 2\beta \partial^2 u / \partial r^2$. Vid $r = R$ sker värmeöverföring med omgivningen enligt ekvationen $(\partial u / \partial r)_{r=R} + \kappa(u(R, t) - u_{omg}) = 0$, där $u_{omg} = 175$ under ugnstiden och därefter $u_{omg} = 22$ (kökstemperaturen).

Termiska diffusiviteten för kött är $\beta = 0.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ och värmeöverföringsstalet är $\kappa = 55$ (sorten är m^{-1}). För vår rostbiff gäller $R = 0.05$.

Det kan vara lämpligt med 50 intervall i rumsled. Ta tio sekunders tidssteg under rostbiffens första minuter i ugnen och övergå sedan till ett tidssteg på 30 sekunder tills köttet är klart att tas ur ugnen. Fortsätt därefter beräkningarna så länge som temperaturen i centrum fortsätter att stiga. Bedöm om tidssteget kan behöva ändras. Ta ut intressanta temperaturfördelningskurvor och resultat.

Nu lagar vi **smördeg sinbakad oxfilé**. För att oxfilén vars diameter bara är sex cm inte ska bli torr vid ugnstekningen i 175° får den ett centimetertjockt lager med vitlöksost och smördeg runt köttet. Den termiska diffusiviteten antas nu variera, värmeledningsekvationen lyder då:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r G(r) \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r \leq R, \quad t \geq 0.$$

$$G(r) = \beta \quad \text{då } 0 \leq r \leq a, \quad \text{och} \quad G(r) = 0.3\beta + 0.7\beta \frac{(R-r)^2}{(R-a)^2}, \quad \text{då } a \leq r \leq R.$$

Rita upp G som funktion av radien. Data i detta fall: $a = 3 \text{ cm}$, $R = 4 \text{ cm}$ och $\beta = 0.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Allt antas ha begynnelsestemperaturen tio grader, dvs $u(r, 0) = 10$, $0 \leq r \leq R$.

Samma slags randvillkor som tidigare gäller, men värmeöverföringstalet mellan smördeg och omgivande luft förmodas vara $\kappa = 45$. Dela intervallet $0 \leq r \leq R$ i 40 delintervall. Gör samma numeriska experiment som vid rostbiffen. Dra slutsatser!

- **4. Biffrolle och julskinka**

Låt biffen i föregående uppgift få ändlig utsträckning och nu utgöras av en tjugo cm lång cylinder med radien fem cm. Av symmetriskäl räcker det att betrakta halva cylindern i z -led, från biffrollens mitt vid $z = 0$ till $z = L_{halv}$.

Värmeledningsekvationen i cylinderkoordinater med r - och z -beroende lyder:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad 0 < r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L_{halv}, \quad t \geq 0.$$

Vid $r = 0$ gäller $\partial u / \partial t = \beta (2 \partial^2 u / \partial r^2 + \partial^2 u / \partial z^2)$. Randvillkoren vid $r = 0$ och $r = R$ är (för alla z) samma som i uppgift 3.

Randvillkoret vid $z = 0$ är av symmetriskäl $\frac{\partial u}{\partial z}(r, 0, t) = 0$. Vid ytterkanten i z -led gäller $\frac{\partial u}{\partial z}(r, L_{halv}, t) + \kappa (u(r, L_{halv}, t) - u_{omg}) = 0$.

Termiska diffusiviteten är $\beta = 0.2 \cdot 10^{-6}$ och värmeöverföringstalet $\kappa = 55$. Temperaturen i hela nötrullen är tio grader då den stoppas in i ugnen. Längdenheten är meter, därför är måtten $R = 0.05$ och $L_{halv} = 0.10$.

Diskretisera med lagom fin indelning i r - och z -led och använd Crank-Nicolsons metod (eller ADI-metoden) för att beräkna temperaturfördelningen $u(r, z, t)$ i biffen under tiden i ugnsvärmen (175°). Den tas ut då temperaturen i centrum uppnått 60° . Fortsätt beräkningarna därefter så länge som temperaturen i biffens mittpunkt stiger.

Använd `contourf`-kommandot för att visa temperaturfördelningen vid olika tidpunkter.

Modifiera algoritmen så att temperaturberäkningarna nu avser en cylindrisk **julskinka** med diametern 20 cm och längden 32 cm. Samma β -värde som tidigare, men värmeöverföringstalet är nu $\kappa = 45$. Ugnstemperaturen ska enligt kokboken vara 150° och julskinkan tas ut ur ugnen då temperaturen i mitten är 72° . Därefter gäller att skinkans omgivningstemperatur är $u_{omg} = 22^\circ$; fortsätt beräkningarna så länge som temperaturen i skinkans mittpunkt stiger.

- **6. Signal propagation in a long wire**

Consider the propagation of signals along a ten kilometers long wire with resistance R , inductance L and capacitance C . The potential $u(x, t)$ is a function of distance x and time t .

$u(x, t)$ is determined by the wave equation for damped oscillations:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq X, \quad t > 0$$

At $t = 0$, the potential $u(x, 0)$ and its time derivative $\partial u / \partial t(x, 0)$ are zero everywhere, that is for $0 < x \leq X$ ($X=10000$).

The boundary value at the left end $x=0$ is a given signal $u_0(t)$. The boundary condition at the right end is such that the signal is not reflected, it just leaves the wire and vanishes. This implies that the transport equation

$$(\partial u / \partial t)_{x=X} + \frac{1}{\sqrt{LC}} (\partial u / \partial x)_{x=X} = 0$$

holds (also called the advection equation).

Discretizing the wire into N parts and replacing the second derivatives in the wave equation by the usual difference approximations and the first derivative by the central difference approximation, one obtains a linear system of equations. For the boundary condition at the right endpoint the upwind algorithm (FTBS) may be useful.

The parameter values are the following: $R = 0.004$ ohm, $L = 10^{-6}$ H and $C = 0.25 \cdot 10^{-8}$ F.

Test $N = 100$ and $N = 200$. Simulate signal propagation for a reasonable length of time (for example less than three milliseconds) with two different timesteps: the maximum timestep that satisfies the stability condition and a timestep 70 percent of that.

You are welcome to try your own in-signals, but first test the $u_0(t)$ produced by the below function. It sends three short pulses with a 0.0004 s period.

```
function usignal=futele(t)
    tau=rem(t,0.0004);
    T0=0; T1=0.00005; T2=0.00010; T3=0.00013; T4=0.00018; T5=0.00025;
    u0=1;
    m=length(t); u1=zeros(m,1);
    ind=find(T0<=tau & tau<=T1 | T2<=tau & tau<=T3 | T4<=tau & tau<=T5);
    u1(ind)=u0*ones(size(ind));
    usignal=u1;
```

• 7. Apriltemperaturvariationer i marken

Under uppslagsordet **mark**¹ i Nationalencyklopedin (NE) finns en bild som visar dygnstemperaturvariationerna i en lerjord, då temperaturen vid markytan under dygnet varierar periodiskt mellan noll och tjugo grader, vilket är typiskt vid högtrycksbetonat aprilväder.

Det gäller att med numeriska simuleringar på värmeledningsekvationen studera temperaturfördelningen under markytan vid brytningen mellan vinter och vår — från mitten av mars till mitten av april — och även försöka rekonstruera bilden i NE. Vi antar att termiska diffusiviteten β i lerjorden kan betraktas som konstant och vi vet att β -värdet ligger i området $0.001 - 0.005 \text{ m}^2/\text{h}$, tidsenheten är timme och längdenheten meter.

Värmeledningsekvationen lyder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

där x är noll vid markytan och $x = L$ är djupet där man förmodar att dygnsmedeltemperaturen $T_0(t)$ råder. Det inträffar redan vid drygt en meters djup, prova $L = 1.2$.

Temperaturen vid markytan antas följa uttrycket

$$u(0, t) = T_0(t) - T_1(t) \cos \frac{2\pi(t-3)}{24}$$

med $T_0(t) = 4 + \frac{12}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{24} - 12\right)$ och $T_1(t) = 7.5 + \frac{5}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{24} - 12\right)$.

Tiden $t = 0$ är vid midnatt en marsdag då dygnsmedeltemperaturen är -2°C . Efter tolv dygn gäller $t = 12 \cdot 24$ och då har medeltemperaturen under dygnet blivit 4°C . Efter en månad (31 dygn) alltså i mitten av april är dygnsmedeltemperaturen uppe i 10 grader. Låt t_{slut} vara $31 \cdot 24$. Under varje dygn är det kallast klockan tre på natten och varmast vid femtontiden.

Rita upp marktemperaturkurvan med tidssteget en halvtimme. Bedöm om arctangensuttrycken är en rimlig modell för den stigande vårtemperaturen.

Det behövs en begynnelsestemperaturfördelning $u(x, 0)$ för att man ska kunna genomföra en numerisk behandling, välj själv en sådan (motivera valet).

Använd finitadifferensmetoden och Crank-Nicolsons metod. Rita intressanta kurvor av olika slag.

Det sista aprildygnet är av särskilt intresse. Visa temperaturfördelningen i marken, $0 \leq x \leq L$, vid några olika tidpunkter under dygnet, t ex var tredje timme. Speciellt viktigt är det att med **contour** åstadkomma en bild med nivåkurvor (isotermer) för att jämförelse med NE-bilden ska kunna ske! Vilket β -värde ger bästa överensstämmelse?

¹www.ne.se/jsp/search/article.jsp?i_art_id=251277&i_sect_id=251283&i_word=mark&i_history=1

• 8. Solitonvågor

Nationalencyklopedin beskriver en soliton på följande sätt:

”Solitär våg, vågpuls med partikelegenskaper. Fenomenet observerades 1834 på en kanal i Skottland, där John Scott Russell (1808-82) kunde följa en vågs vandring flera kilometer utan att finna att den ändrade form eller hastighet. Solitoners stabila egenskaper härrör från balans mellan två motsvarande effekter: utjämnning av vågen genom dispersion (utspridning) och storleksberoende ickelinjär sammanpressning. Havsvågor av solitonkaraktär, ca 30 m höga, åtföljer ofta vulkaniska utbrott och jordskred. Solitoner påvisades 1968 experimentellt i en optisk fiber och erbjuder nya möjligheter för optisk kommunikation med laser. Medicinska och biologiska tillämpningar rörande nervpulsers utbredning förutses.”

Solitoner beskrivs av följande ickelinjära partiella differentialekvation som formulerades av Korteweg och de Vries år 1895:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Vi studerar förloppet i intervallet $-12 \leq x \leq 12$ med periodiska randvillkor: $u(12, t) = u(-12, t)$ och $\partial^k u / \partial x^k(12, t) = \partial^k u / \partial x^k(-12, t)$ för $k = 1, 2, \dots$

För att en soliton ska uppträda måste startvågen ha en viss form och viss amplitud. Prova med startvågen $u(x, 0) = 27/(\cosh x + \cosh 3x)$.

Använd finitadifferensmetoden med 240 intervall för rumsdiskretiseringen. Problemet övergår till ett system av ordinära differentialekvationer $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{u})$. Gör datasimulering från tiden $t = 0$ till $t_{slut} = 1.2$ med Runge-Kuttas metod RK4 med tidssteget $\delta t = 0.001$.

Visa och förklara vad som händer om man tar större tidssteg, $\delta t = 0.002$.

Prova hur känslig solitonvågen är för en amplitudförändring av startvågen. Visa experimentellt vad som inträffar vid en stor förändring av startvågens amplitud. Hur många procents förstoring eller förminskning kan man tillåta och ändå behålla acceptabel solitoneffekt?

En implicit metod såsom trapetsmetoden är ett alternativ till RK4. Vad är fördelen och vad är nackdelen?

- **9. Glace au four**

Recept på Glace au four²: På ett ugnsfäst fat läggs ett skikt med sockerkaka – gärna indränkt med lite fruktsaft, därefter läggs ett fem cm tjockt lager med hårdfrusen glass, temperatur -15° , och ovanpå hålls marängsmet.

Ställ in fatet i 275° varm ugn i cirka 3 minuter. Då hinner marängen stelna men förhoppningsvis har inte glassen hunnit smälta mer än alldeles intill sockerkakan eller maränghöljet. Undersök hur det är med det!

Värmeledningsekvationen i en rumsdimension lyder:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x \leq L, \quad t \geq 0.$$

Data: Sockerkakshöjd $a = 1$ cm; glassen når till höjden $b = 6$ cm och totalhöjden med marängsmet uppgår till $L = 7$ cm.

Den termiska diffusiviteten för skikten med sockerkaka, glass och maräng är $g(x) = 0.3\beta$ då $x \leq a$, $g(x) = \beta$ då $a \leq x \leq b$ och $g(x) = 0.1\beta$ då $b \leq x \leq L$, där $\beta = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. (Tänk på att längdenheten är meter!)

Starttemperatur är 20° i sockerkakan och marängen och -15° däremellan.

Vid $x = 0$ sker värmeöverföring mellan ugnsluften och fatet med sockerkaka enligt: $-K_0 (\partial u / \partial x)_{x=0} + H_0 (u(0, t) - u_{\text{ugn}}) = 0$ med värmeledningsförmågan $K_0 = 3.2$ (sorten är $\text{W}/\text{m}/^\circ\text{C}$) och värmeöverföringstalet $H_0 = 80$.

Motsvarande gäller vid marängytan: $K_1 (\partial u / \partial x)_{x=L} + H_1 (u(L, t) - u_{\text{ugn}}) = 0$ med $K_1 = 1.6$ och $H_1 = 150$.

Utför den numeriska behandlingen med finitadifferensmetoden eller Galerkins metod och därefter med Crank-Nicolsons metod för ode-systemets lösning.

Det är lämpligt med 70 intervall i x -led. Låt tidssteget vara litet (t ex en sekund) under en halv minut och övergå därefter till ett lite större tidssteg.

När marängytan har nått temperaturen 100° är det dags att ta ut glassdesserten ur ugnen. Hur lång tid tar det? Är glassen fortfarande frusen? Det beror på den valda ugnstemperaturen. Prova $u_{\text{ugn}} = 200, 225$ och 275° .

Rita temperaturkurvor och notera speciellt temperaturen vid glassens mitt.

²Se t ex <http://www.dn.se/DNet/jsp/polopoly.jsp?d=118&a=360588>

• **9. Glace au four (English version)**

Recipe for Glace au four³: Give an ovenproof plate a layer of sponge cake soaked in fruit juice, then a five cm thick layer of of hardfrozen ice cream, temperature -15°C , and pour meringue batter on top of it.

Insert the plate into the 275°C hot oven for about 3 minutes. The meringue will harden but hopefully the ice cream has not have time to melt except for a thin top layer close to the meringue and a thin bottom layer close to the sponge cake. Investigate that scientifically!

The heat equation in one space dimension has the form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x \leq L, \quad t \geq 0.$$

Data: Sponge cake height $a = 1$ cm; the ice cream reaches the height $b = 6$ cm and the total height including meringue batter is $L = 7$ cm.

The thermal diffusivity for the layers is $g(x) = 0.3\beta$ when $x \leq a$, $g(x) = \beta$ when $a \leq x \leq b$ and $g(x) = 0.1\beta$ for $b \leq x \leq L$, where $\beta = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. (Note that the length unit is meter!)

Start temperature is 20°C in the cake and in the meringue, and -15°C in the ice cream.

Heat transfer occurs at $x = 0$ according to: $-K_0 (\partial u / \partial x)_{x=0} + H_0 (u(0, t) - u_{\text{oven}}) = 0$ with heat conductivity $K_0 = 3.2$ (the unit is $\text{W}/\text{m}/^{\circ}\text{C}$) and heat transfer coefficient $H_0 = 80$ ($\text{W}/\text{m}^2/^{\circ}\text{C}$).

The corresponding equation at $x = L$ is: $K_1 (\partial u / \partial x)_{x=L} + H_1 (u(L, t) - u_{\text{oven}}) = 0$ with $K_1 = 1.6$ and $H_1 = 150$.

For the numerical treatment, use either the finite difference method or Galerkin's method and some appropriate solution method for the ode-system.

Use 70 intervals in the x -direction.

When the meringue boundary has reached 100° , it is time to remove the ice cream dessert from the oven. How long does it take? Is the ice cream still frozen? That depends on the chosen oven temperature. Test $u_{\text{oven}} = 200, 225$ and 275° .

Draw temperature curves and note in particular the temperature in the center of the ice cream.

³<http://www.dn.se/DNet/jsp/polopoly.jsp?d=118&a=360588>

• **10. Värmeutveckling i bromsskiva på bil**

Här ska vi studera temperaturstegringen i skivbromsarna på framhjulen på en bil (t ex SAAB 900) under en kraftig inbromsning. Bromsskivan är ett 12 mm tjockt skikt av stål (eller liknande) med bromsbelägg på båda sidor; symmetrin gör att vi endast behöver räkna på halva skiktet. Låt friktionsytan finnas vid $x = 0$, och låt $x = L$ beteckna halva skiktet där randvillkoret av symmetriskäl är $\partial u / \partial x = 0$.

Om diffusiviteten kan betraktas som konstant lyder värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x \leq L, \quad t \geq 0.$$

(Nedan ska även ett fall med ickekonstant diffusivitet behandlas.)

Den termiska diffusiviteten för stål rör sig om $\beta = 8 \cdot 10^{-6}$ i sorten m^2/s .

Randvillkor vid $x = 0$: $-K (\partial u / \partial x)_{x=0} + H (u(0, t) - u_{\text{luft}}) = Q(t)$, där $Q(t)$ är en effektfunktion som beror av bromskraften vilken i sin tur beror av biltypen, retardationen och hastigheten vid inbromsningen (från 30 m/s till stillastående på tre sekunder). För vår biltyp antas effektfunktionen för $0 < t < 3$ vara $Q(t) = 2 \cdot 10^6 (3 - t)^2$ och $Q(t) = 0$ annars.

$K = 100$ är värmeledningsförmågan hos stål (sorten är $\text{W}/\text{m}/^\circ\text{C}$). Storheten $H = 15000 \text{ W}/\text{m}^2/^\circ\text{C}$ är värmeöverföringstalet mellan omgivande luft och bromsskivan. Inbromsningen görs en skön majdag då temperaturen i luften är 20° vilket utgör temperaturen i hela bromsskivan då inbromsningen börjar.

Pröva först med 30 intervall i rumsled. Låt tidssteget vara litet (t ex $\delta t = 0.005$ eller 0.01) under en halv sekund och övergå sedan till $\delta t = 0.05$. Rita upp temperaturfördelningen vid varje tidssteg. Notera maximala temperaturen vid friktionsytan $x = 0$ och vid bromsskivans mitt $x = L$. Gör om beräkningarna med 60 intervall i rummet. Ge en tillförlitlighetsbedömning av maxtemperaturvärdena. Varför så litet tidssteg i början? Testa med $\delta t = 0.05$ under hela beräkningen. Diskutera resultatet.

Om föraren startar på nytt och efter bara några sekunder gör en ny kraftig inbromsning har temperaturen i bromsskivan inte hunnit ner till lufttemperatur. Räkningarna blir som tidigare men med annan starttemperaturfördelning. Experimentera med detta!

Man funderar på att göra bromsskivan i ett material med den termiska diffusiviteten $D(u) = \beta_0(1 + \beta_1 u)$, med $\beta_0 = 4 \cdot 10^{-6}$ och $\beta_1 = 0.003$.

Värmeledningsekvationen lyder $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D(u) \frac{\partial u}{\partial x})$ som kan utvecklas till

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta_0 \left((1 + \beta_1 u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 \right)$$

med samma randvillkor och samma K och H -värden som tidigare. Utför beräkningar på detta icke linjära problem och jämför maxtemperaturvärdena med de ovan erhållna.

• **12. Sfäriskt akvarium med förgiftad guldfisk**

Puttes syster har en liten guldfisk i ett klotformat akvarium som är till hälften fyllt med vatten. Putte tycker inte om guldfiskar och har därför bestämt sig för att förgifta fisken så att den dör. Fisken ligger inte ont anande och sover middag halvvägs under skålens centrum,

Putte håller försiktigt ned sin giftlösning i guldfiskskålen så att den fylls helt. Vi får göra antagandet att giftlösningen skiktat sig ovanpå vattnet och inte börjar blanda sig med vattnet förrän skålen är full. Giftet sprider sig i vattnet enligt diffusionsekvationen i sfäriska koordinater (utan φ -beroende):

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}), \quad 0 < r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad t > 0.$$

Diffusionskoefficienten för denna mixtur är $a = 4.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Vid $r = R$ gäller $\partial u / \partial r = 0$. Vid $\theta = 0$ och $\theta = \pi$ gäller det naturliga randvillkoret $\partial u / \partial \theta = 0$. Begynnelsevillkoret är att giftkoncentrationen $u(r, \theta, 0)$ är ett (dvs hundra procentig) i övre halvan av akvariet ($0 \leq \theta < \pi/2$) och noll överallt i den undre halvan ($\pi/2 < \theta \leq \pi$). Vid gränsytan $\theta = \pi/2$ sätts koncentrationen till medelvärdet 0.5.

Akvariet har diametern 24 cm (alltså $R = 0.12$). Guldfisken finns hela tiden rakt under centrum på avståndet $R/2$. Guldfisken dör då giftkoncentrationen hos den uppgår till 40 procent av koncentrationen i den ursprungliga lösningen.

Gör lagom fin diskretisering av r och θ (t ex 12 eller 24 delintervall i r -led och 20 i θ -led). En implicit metod är lämplig för beräkning av giftkoncentrationen i akvariet vid ökande tider.

Efter hur lång tid dör guldfisken? Rita intressanta giftkoncentrationskurvor av olika slag.

• **13. Roterande vätska i burk och tekopp**

En viskös vätska finns inuti en cylinder med radien $R = 40$ mm. Cylindern med innehåll roterar med vinkelhastigheten Ω , så att $u_\phi = \Omega r$, $0 \leq r \leq R$. Vätskan har inga hastighetskomponenter i r - och z -led utan enbart komponenten $u = u_\phi$.

Plötsligt stannar cylindern. Vätskans rörelse bestäms för $t > 0$ av den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H$$

med begynnelsevillkoret $u = \Omega r$. Randvillkoren är $u = 0$ vid $r = 0$ och $r = R$ samt $u = 0$ även vid burkens ändytor $z = 0$ och $z = H$. Konstanten ν är viskositetskoefficienten. För vatten gäller $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Vinkelhastigheten kan antas vara $\Omega = 1$.

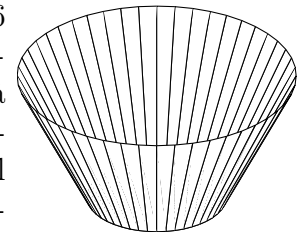
Vi vill beräkna och rita kurvor över hur hastigheten $u(r, z, t)$ i vätskan förändras med tiden.

a) Det är lämpligt att först betrakta problemet för en oändligt hög cylinder. Vätskans hastighet blir då oberoende av z , vilket förenklar differentialekvationen och dess numeriska lösning eftersom problemet blir endimensionellt i rummet. Använd Crank-Nicolsons metod för att beräkna hastighetsfördelningen $u(r, t)$ i vätskan. Rita kurvor över vätskans hastighet som funktion av radien vid olika tidpunkter.

b) Cylindern har i själva verket en höjd på $H = 8$ cm. Att hastigheten är noll vid $z = 0$ och $z = H$ får betydelse för hastighetsfördelningen i cylindern. Använd Crank-Nicolsons metod för den numeriska behandlingen av detta tvådimensionella problem. Rita hastighetsfördelningen vid olika tidpunkter med `contourf`-kommandot. Diskutera de erhållna resultaten i fallen med oändlig resp ändlig cylinder.

c) Studera samma problem men byt den slutna burken mot en öppen tekopp med bottenradien 3 cm. Koppen är fylld med te till höjden 6 cm och där är radien 6 cm. Tekoppen roterar kring $r = 0$ med vinkelhastigheten $\Omega = 0.5$ och stannar tvärt. Vid $t = 0$ gäller alltså $u(r, z, 0) = \Omega r$. Randvillkoret vid $r = 0$ samt vid botten och längs koppens vägg är som förut $u = 0$. Upptill gäller egentligen att vätskeytan har en parabolisk nedbuktning pga rotationen. Vi bortser från det och låter ytan vara plan vid $z = H$ med randvillkoret $\partial u / \partial z = 0$.

Beräkna och rita hastighetsfördelningen i tekoppen vid olika tider.



• 15. Oren Rhen

Vid en olycka i november 1986 släppte en pesticidfabrik i Schweiz ut en stor mängd bekämpningsmedel i floden Rhen under tio timmar. En modell för resultatet av flodföroreningen ges av

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \Psi(x, t).$$

x är avståndet i kilometer längs floden från flodkällan, t är tiden i timmar räknad från utsläppets början och $u(x, t)$ anger giftkoncentrationen i mol/km.

Den första termen i högerledet beskriver diffusionen, där β är diffusiviteten för vatten. Den andra termen beskriver transporten, där ν är vattenflödets hastighet. Den sista termen är själva giftutsläppet $\Psi(x, t)$, som ju är noll för alla x utom i ett kort intervall kring fabriken.

Avståndet till flodmynningen är 500 km och fabriken ligger vid $x = 100$.

$$\begin{aligned}\beta &= 25 \text{ km}^2/\text{h} \\ \nu &= 5 \text{ km/h} \\ \delta x \Psi(x, t) &= 2.4 \text{ mol/h}, \quad 100 \leq x < 100 + \delta x, \quad 0 \leq t \leq 10.\end{aligned}$$

Så som Ψ definieras spelar det exakta värdet på rumssteget δx just ingen roll, den utsläppta mängden blir alltid densamma – motivera detta!

Begynnelsevillkor: $u(x, 0) = 0$ för $0 \leq x \leq 500$; randvillkoren är $u(0, t) = 0$ och $u(500, t) = 0$ (vid utloppet i havet blir giftkoncentrationen försumbar).

Lös problemet numeriskt för hela flodlängden med ett rumssteg δx på förslagsvis en km. Beräkningar ska ske från tiden $t = 0$ fram till dess att giftet blir uppmätbart (u -värdet passerar gränsvärdet 0.001) vid en mätplats 4 km före flodmynningen, alltså vid $x = 496$.

Experimentera med olika tidssteg och rita informativa kurvor över hur giftet förflyttas och sprids längs floden. Försök också att besvara följande frågor:

- Påverkas floden uppströms av utsläppet?
- På hur lång flodsträcka nås fiskdödsvärdet $u = 0.25$?
- Rita u som funktion av x , dels för $t = 10 + \delta t$ (första tidssteget efter utsläppets upphörande), dels för $t = 30$. Vad är arean under dessa båda kurvor? Fysikalisk betydelse?

Många tidningsartiklar skrevs i november 1986 om utsläppet i Rhen. Här är några referenser:

- [1] P Lewis, "Huge chemical spill in the Rhine creates havoc in four countries", *The New York Times*, 11 nov 1986.
- [2] T Roth, "Swiss accident that polluted the Rhine may have heaviest impact on Germany", *The Wall Street Journal*, 11 nov 1986.
- [3] J Tagliabue, "Rhine poisoning stretching 185 miles", *The New York Times*, 13 nov 1986.

Vi ska undersöka vågutbredningen i en vågledare med en krök enligt figuren. En plan våg skickas in vid vänstra kortsidan. Svängningarna inuti vågledaren beskrivs av vågekvationen

Tidsberoendet kan elimineras om vågen är monokromatisk med känd våglängd λ . Vi inför $\omega = 2\pi/\lambda$ och ansätter den monokromatiska vågen som $U(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}$.

Randvillkor: $u = 0$ vid vågledarens längsgående väggar som är av metall. Vid vågledarutgången, den nedre kortsidan i figuren, sker ingen reflektion av vågen. Villkoret där uttrycks av transportekvationen $\frac{\partial U}{\partial t} \pm \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, med plus-tecken om y -axeln är riktad nedåt. Även här kan tidsberoendet elimineras och randvillkoret vid $y = y_{utg}$ blir $\pm \partial u / \partial y + i \omega u = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U - e^{i\omega(t-x)}) - \frac{\partial}{\partial x}(U - e^{i\omega(t-x)}) &= 0 \implies \\ i\omega(u(0, y) - e^{-i\omega 0}) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\omega e^{-i\omega 0}\right) &= 0 \implies \\ \partial u / \partial x - i\omega u + 2i\omega &= 0 \end{aligned}$$

Problemet är en modifiering av demoexemplet ”Transmission of Microwaves” i MATLABS toolbox FEMLAB, med kort beskrivning i häftet *FEMLAB, User’s Guide and Introduction*.

$$x=[0 \ 0.16 \ 0.20 \ 0.20 \ 0.16 \ 0.16 \ 0.14 \ 0], \ y=[0 \ 0 \ 0.04 \ 0.20 \ 0.20 \ 0.06 \ 0.04 \ 0.04].$$

Det är intressant att undersöka fall där våglängden hos den inkommande vågen är av ungefär samma storleksordning som vågledarbredden. Experimentera med våglängder λ från 30 mm till 80 mm.

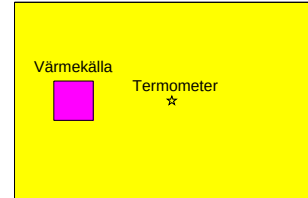
Figuren visar ett gitter med diskretiseringssteget $h = 0.005$. Utför den numeriska behandlingen av problemet med finitadifferensmetoden. Använd steget $h = 0.005$ i de första experimenten men övergå till steget 0.0025 i produktionskörningarna. Vad är fördelar och nackdelar med ytterligare en halvering av steget?

Problemet omfattar komplexvärda storheter vilket medför att den numeriska lösningens komponenter $u(x_i, y_i)$ får komplexa värden. Vid uppritningen betraktas lämpligen realdelen av u som kan tolkas som vågutbredningen i vågledaren vid en fryst tidpunkt.

• **18. Metallblock med värmekälla och termometer**

Vi ska studera ett stationärt värmeledningsproblem för ett homogent metallblock med rektangulärt tvärsnitt 0.30×0.20 m. Problemet kan betraktas som ett tvådimensionellt elliptiskt PDE-problem, eftersom blocket har stor utsträckning i z -led och villkoren vid blockets väggar är oberoende av z .

Inuti blocket i hela dess längd finns en värmekälla vars tvärsnitt är en liten kvadrat 0.04×0.04 m, med vänstra kanten 0.04 m från rektangelns vänstra sida och symmetriskt placerad i y -led enligt figuren. Metallblocket har värmeutbyte med omgivningen vid vänstra väggen ($x = 0$) genom en tunt glasskikt. De övriga väggarna är värmeisolerade.



Uppgiften är att bestämma temperaturfördelningen i metallblocket när stationärt tillstånd uppstått. Temperaturen $u(x, y)$ bestäms då av Poissons ekvation

$$\beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + q(x, y) = 0$$

där $\beta = 45$ (sort W/m K) är metallens värmeledningskoefficient — detta gäller även i kvadraten. Vi antar att värmekällan ger jämnt fördelat värmefflöde på $q(x, y) = 4000/0.04^2$ (sort W/m³) innanför kvadrattvärsnittet. Utanför värmekällan gäller $q = 0$. I punkter på kvadratens rand utnyttjas halva q -värdet (analogt med trapetsregeln vid integration).

Omgivningens temperatur är $u_{omg} = 20^\circ\text{C}$. Värmeöverföringstalet vid vänstra väggens glasskikt är $K_c = 900$. Randvillkoret vid $x = 0$ lyder

$$\beta \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = -K_c (u_{omg} - u(0, y)).$$

Metallblockets isolerande väggar leder till neumann-randvillkor $\partial u / \partial y = 0$ vid övre och undre väggen och $\partial u / \partial x = 0$ vid högra väggen.

Pröva tre olika diskretiseringssteg, först $h = 0.02$ och därefter $h = 0.01$ och 0.005 . Rita ekvipotentialkurvor för temperaturfördelningen och skriv ut metallblockets maxtemperatur (som naturligt nog påträffas i lilla kvadraten). Skriv också ut temperaturvärdet på termometerns plats i figuren. Den ligger på symmetrilinjen i y -led vid $x = 0.16$.

Vi vill nu studera hela värmeledningsförloppet i metallblocket. Det gäller alltså att lösa värmeledningsekvationen

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + q(x, y)$$

från tiden $t = 0$ då hela blocket antas ha temperaturen 20°C ända tills det stationära tillståndet uppnås. Värmekapacitetskonstanten α antas ha värdet $\alpha = 1.2 \cdot 10^5$.