

Lösningar till udda uppgifter i övningsexempel PDE

1. a) Variationsformulering av

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 :$$

Finn $u \in V = \{v(x) : v(0) = 0, \int_0^1 [v^2 + (v')^2] dx < \infty\}$ så att

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V.$$

- b) Apriori feluppskattning. Se boken.
c) Aposteriori feluppskattning. Se boken.

3. Utgår från d'Alemberts formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{u_0(x-t) + u_0(x+t)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(s) ds.$$

- a) Finner att $u(x, 2) = 1$ för $x < -2$, $u(x, 2) = \frac{1}{2}$ för $-2 < x < 2$ och $u(x, 2) = 0$ för $x > 2$, se figur.
b) Finner att $u(x, 2) = \frac{1}{2}(-x-3)$ för $-3 < x < -2$, $u(x, 2) = \frac{1}{2}(x+1)$ för $-2 < x < -1$, $u(x, 2) = \frac{1}{2}(x-1)$ för $1 < x < 2$, $u(x, 2) = \frac{1}{2}(3-x)$ för $2 < x < 3$, $u(x, 2) = 0$ för övrigt, se figur 3b.

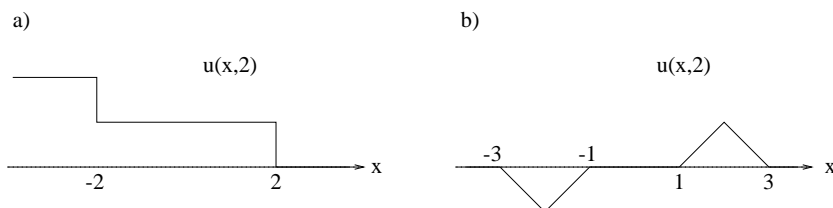


Figure 1:

- c) En lösning (finns fler) skulle kunna vara $u_0(x) = 1$ för $1+8n < x < 3+8n$ och $-(3+8n) < x < -(1+8n)$, $u_0(x) = -1$ för $5+8n < x < 7+8n$ och $-(7+8n) < x < -(5+8n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $u_0(x) = 0$ för övrigt, se figur 3c.
5. a) Multiplikation med u och integration i x -led ge

$$\begin{aligned} \int_0^1 \dot{u} u dx - \epsilon \int_0^1 u'' u dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \epsilon \|u'\|^2 - u'(1)u(1) + u'(0)u(0) \\ &= \|u\| \frac{d}{dt} \|u\| + \epsilon \|u'\|^2 = \int_0^1 f u dx \leq \|f\| \|u\|, \end{aligned}$$

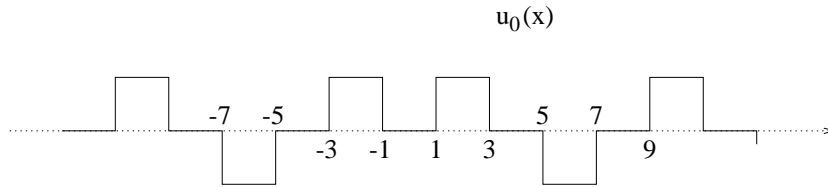


Figure 2:

dvs $\frac{d}{dt}\|u\| \leq \|f\|$ som efter integration i t -led ger den sökta olikheten, eftersom $u = 0$ för $t = 0$.

- b) Multiplikation med u och integration i x -led med $\dot{u} = 0$ (även sista led i a)) ger

$$\epsilon \|u'\|^2 \leq \|f\| \|u\|.$$

Vi utnyttjar nu Poincaré olikheten $\|u\| \leq \|u'\|$ och förkortar med $\|u'\|$ vilket ger den sökta olikheten. Poincaréolikheten följer av att $u(x) = \int_1^x u'(s) ds$, eftersom ju $u(1) = 0$.

7. a) Ekvationerna beskriver hur temperaturen u utvecklas med tiden t i ett (endimensionellt) område $0 < x < 1$ med given värmeproduktion f med randvillkoren att $u = 0$ vid $x = 0$ och att värmeffödet q hålls $= 0$ (isolering) vid $x = 1$. a är konduktiviteten.
- b) Ekvationen $q = -au'$ uttrycker att värmeffödet är proportionellt mot temperaturfallet per längdenhet, med en proportionalitetskonstant a som beror på det värmeledande mediet ifråga. Ekvationen för \dot{u} erhålls genom att betrakta ett godtyckligt intervall (a, b) i vilket tillförd värme per tidsenhet $= \int_a^b f dx + q(a, t) - q(b, t) = \int_a^b f dx - \int_a^b q' dx$ måste vara lika med accurmulerad värme per tidsenhet $= \frac{d}{dt} \int_a^b u dx = \int_a^b \dot{u} dx$. Eftersom intervallet var godtyckligt måste gälla att $\dot{u} = f - q'$ för alla $0 < x < 1$.
- c) Betraktar ett fall med två rumsdimensioner med koordinater x, y . Värmeffödet ges nu av $q = -a\nabla u = -a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ och motsvarande randvillkor övergår i $q \cdot n = 0$, där n är en given normalvektor till randen för det aktuella området. Själva värmeledningsekvationen blir $\dot{u} = f - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ kortare skrivet som $\dot{u} = f - \nabla \cdot (a\nabla u)$.

9. a)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, \text{ i } \Omega \\ u &= 0, \text{ på } \Gamma \end{aligned} \quad (1)$$

Multiplicera (1) med $v \in H_0^1(\Omega)$ och integrera:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v$$

Variationsformulering:

Finn $u \in H_0^1(\Omega)$ s.a. $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u = \int_{\Omega} v, \forall v \in H_0^1(\Omega).$

FEM: Finn $U \in V_h^0$ s.a.

$$\text{Finn } U \in V_h^0 \text{ s.a.} \quad \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v, \forall v \in V_h^0 \quad (2)$$

$V_h^0 = \{v : v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig på } \Omega, v \equiv 0 \text{ på } \Gamma\}$ på trianguleringen i figur 9a:

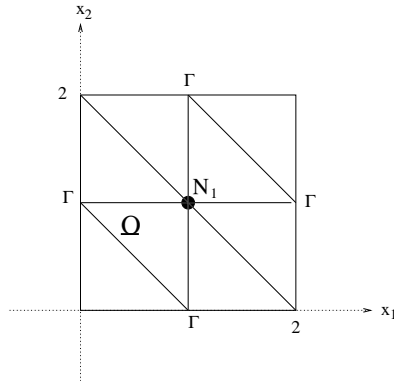


Figure 3:

En bas för V_h^0 utgörs av $\{O_i\}_{i=1}^1$, där $O_1 \in V_h^0$, $O_1(N_1) = 1$.

Ansätt

$$U = \xi_1 O_1 \quad (3)$$

(2) är ekvivalent med: Finn $U \in V_h^0$ s.a.

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla O_1 = \int_{\Omega} O_1 \quad (4)$$

Insättning av (3) i (4) ger

$$\xi_1 \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_1 = \int_{\Omega} O_1$$

$$\underline{\underline{a_{11} \xi_1 = b_1}}$$

$$a_{11} = \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_1 = \dots = 4, \quad b_1 = \int_{\Omega} O_1 = G \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{3} = 1$$

Svar: Styvhetsmatris : $A = [a_n] = [4]$
 Lastvektor : $b = [b_1] = [1]$

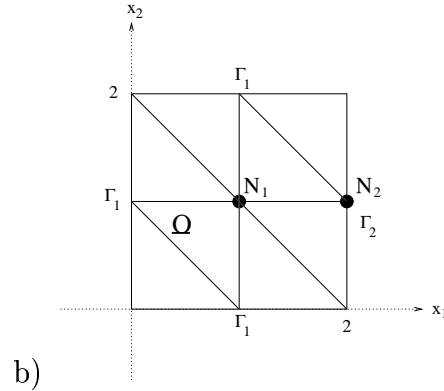


Figure 4:

Def: $V = \{v : v \in H^1(\Omega), v \equiv 0 \text{ på } \Gamma_1\}$

Multiplera (1) med $v \in V$ och integrera:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v,$$

ty $v \equiv 0$ på Γ_1 och $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ på Γ_2 .

Variationsformulering:

Finn $u \in V$ s.a. $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v, \quad \forall v \in V.$

FEM:

$$\text{Finn } U \in V_h \text{ s.a.} \quad \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v, \quad \forall v \in V_h \quad (5)$$

($V_h = \{v : v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig på } \Omega, v \equiv 0 \text{ på } \Gamma_1\}$, på trinaguleringen i fig 9b).

En bas för V_h utgörs av $\{O_i\}_{i=1}^2$, där $O_i \in V_h, i = 1, 2$ samt $O_i(N_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2.$

Nu är (5) ekvivalent med:

$$\text{Finn } U \in V_h \text{ s.a. } \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla O_i = \int_{\Omega} O_i, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Ansätt $U = \sum_{j=1}^2 \xi_j O_j$. Insättning i (6) ger

$$\sum_{j=1}^2 \xi_j \underbrace{\int_{\Omega} \nabla O_j \cdot \nabla O_i}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} O_i}_{b_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\underline{\underline{A\xi = b}}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_{\Omega} O_1 = 1, \quad b_2 = \int_{\Omega} O_2 = \frac{1}{2} \\ a_{11} &= \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_1 = 4, \quad a_{22} = \int_{\Omega} \nabla O_2 \cdot \nabla O_2 = 2, \\ a_{12} &= a_{21} = \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_2 = -1 \end{aligned}$$

Svar: Styvhetsmatris: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
 Lastvektor: $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

11. a) Metoden bygger på att

$$\int_a^b \int_0^1 u v dx dt + \epsilon \int_a^b \int_0^1 u' v' dx dt = \int_a^b f v dx dt,$$

för v sådana att $v(1, t) = 0$. Ansätter för $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ en approximativ lösning

$$U(x, t) = U_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} U_{n,j} \phi_j(x),$$

där ϕ_j är den kontinuerliga styckvis linjära hattfunktionen som är $= 1$ i noden $x_j = j/m$ och $= 0$ i övriga noder. Söker sedan (med givna ϵ och f) $U_{n,j}$ sådana att

$$\int_0^1 (U_n - U_{n-1}) \phi_i dx + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 U_n' \phi_i' dx dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 t \phi_i dx dt,$$

dvs vektorn $U_n = \{U_{n,j}\}$ sådan att $MU_n + SU_n = MU_{n-1} + B$, där M är den tridiagonala massmatrisen med element $2h/3$ på diagonalen, med undantag av det första diagonalelementet som blir $h/3$ motsvarande en halv hatt, samt $h/6$ på sub- och superdiagonalerna, och där styvhetsmatrisen S har element $2/h$ på diagonalen, med undantag av det första som blir $1/h$, samt $-1/h$ på sub- och superdiagonalerna. Vektorn B har elementen $\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 t \phi_i dx dt = k \frac{t_{n-1} + t_n}{2} = (t_n^2 - t_{n-1}^2)h$, där $k = t_n - t_{n-1}$ är tidssteget, och $h = 1/m$ är rumssteget. Det första elementet i B är hälften så stort motsvarande en halv hatt.

- b) Koefficienten $U_{n,0}$ i ansatsen är nu känd och är $=7$. Dvs en 7-multipel av första kolonerna i matriserna M och S kan subtraheras från båda led, varefter första ekvationen kan stryckas.
13. a) Låt φ_1, φ_2 vara de styckvis linjära kontinuerliga basfunktionerna som är $=1$ i nod 1 resp. 2 och $=0$ i övriga noder. Söker $U = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$ så att

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \quad i = 1, 2.$$

Beräknar

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 &= \int_{AUBUCUDU\dots} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \\ &= \int_{AUB} (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + \int_{CUD} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \dots \\ &= 4 \end{aligned}$$

Analogt,

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_1 = \int_A (-1) \cdot 1 + 0(-1) + \int_B (-1)1 + 0 \cdot 1 = -1$$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2 = \int_{AUB} \underbrace{\nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2}_{=2} + \int_{\text{Resten}} \underbrace{\nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2}_{=1} = 4$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_1 = \int_{DUEUFUG} \varphi_1 + 2 \int_{HUAUBUC} \varphi_1 = \frac{2}{3} + 2 \frac{2}{3} = 2$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_2 = 2 \cdot \frac{3}{3} = 2$$

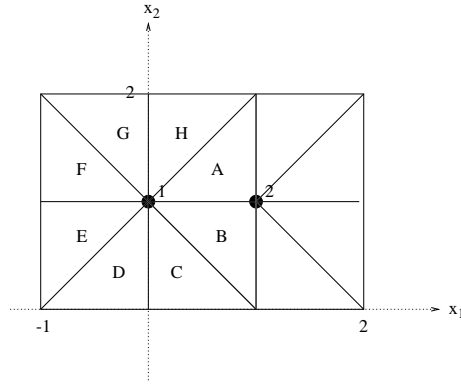


Figure 5:

$$\text{Styvhetsmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Lastvektor.}$$

b) Tillkommer basfunktion φ_3 ($=1$ i nod 3, $=0$ i övriga).

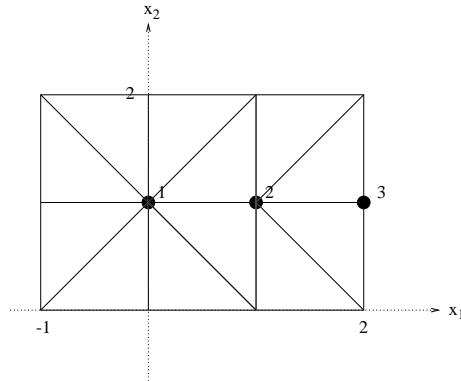


Figure 6:

$$\text{Beräknar } \int_{\Omega} \nabla \varphi_3 \cdot \nabla \varphi_3 = 2, \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_3 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_3 \cdot \nabla \varphi_2 = -1,$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_3 = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{Styvhetsmatrix: } \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

15. Metoden bygger på att

$$\int_a^b \int_0^1 uv dx dt + \int_a^b \int_0^1 (u'v' + uv) dx dt = \int_a^b 20v dx dt,$$

för v sådana att $v(0, t) = 0$. Ansätter för $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ en approximativ lösning

$$U(x, t) = U_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\psi_n(t),$$

$$U_n(x) = \sum_{j=1}^m U_{n,j}\phi_j(x),$$

där ψ_n och ϕ_j är de kontinuerliga styckvis linjära hattfunktionerna i t - resp x -led som är $=1$ i noden t_n resp $x_j = j/m$ och $=0$ i övriga noder. Söker sedan $U_{n,j}$ sådana att

$$\int_{I_n} \int_0^1 \dot{U}\phi_i dx dt + \int_{I_n} \int_0^1 (U'\phi_i' + U\phi_i) dx dt = \int_{I_n} \int_0^1 20\phi_i dx dt,$$

dvs vektorn $U_n = \{U_{n,j}\}$ sådan att

$$MU_n - MU_{n-1} + \frac{k}{2}S(U_n + U_{n-1}) + \frac{k}{2}M(U_n + U_{n-1}) = B,$$

dvs $(M + \frac{k}{2}S + \frac{k}{2}M)U_n = (M - \frac{k}{2}S - \frac{k}{2}M)U_{n-1} + B$, där M är den tridiagonala massmatrisen med element $2h/3$ på diagonalen, med undantag av det sista diagonalelementet som blir $h/3$ motsvarande en halv hatt, samt element $h/6$ på sub- och superdiagonalerna, och där styvhetsmatrisen S har element $2/h$ på diagonalen, med undantag av det sista diagonalelementet som blir $1/h$, samt element $-1/h$ på sub- och superdiagonalerna. Vektorn B har elementen $B_i = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 20\phi_i dx dt = 20kh$ resp $B_m = 10kh$, där $k = t_n - t_{n-1}$ är tidssteget, $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ och $h = 1/m$ är rumssteget.

17. a) Vi har att

$$\|\Delta u\|^2 = \int_{\Omega} u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy}.$$

Partiell integration först i y -led och sedan i x -led ger

$$\int_{\Omega} u_{xx}u_{yy} = \int_{\Gamma} u_{xx}u_y n_y - \int_{\Omega} u_{xxy}u_y = \int_{\Gamma} u_{xx}u_y n_y - \int_{\Gamma} u_{xy}u_y n_x + \int_{\Omega} u_{xy}u_{xy}.$$

där $n = (n_x, n_y)$ är den yttre enhetsnormalen till randen. På den del av randen där $n_y \neq 0$ (tak och golv) gäller $u_{xx} = 0$, eftersom $u = 0$, och så den del av randen där $n_x \neq 0$ gäller $u_y = 0$ av samma skäl. Detta ger alltså att $\int_{\Omega} u_{xx}u_{yy} = \int_{\Omega} u_{xy}u_{xy}$ vilket ger den sökta identiteten.

- b) I fallet $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ på randen gäller där $n_y \neq 0$ att $u_y = 0$ och där $n_x \neq 0$ att $u_{xy} = 0$, eftersom $u_x = 0$ i y -led där. Alltså erhålles samma resultat.
- c) Vi har $\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2 \Delta \phi = -2 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla \phi \leq 2 \max_{\Omega} |\nabla \phi| \|u\| \|\nabla u\|$, varifrån den önskade olikheten följer med $C_{\Omega} + 2 \max_{\Omega} |\nabla \phi|$.

19. Se boken.

21. a) Låt φ_1 och φ_2 vara basfunktionerna motsvarande de två inre noderna enl. figur 21a

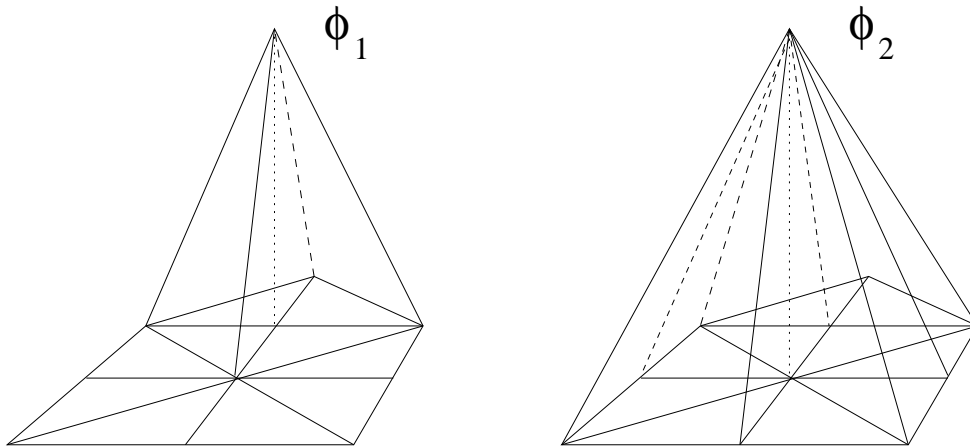


Figure 7:

Enligt formeln $\frac{\text{basen} \times \text{höjden}}{3}$ för volymen av en kon erhålls

$$\int_{\Omega} \varphi_1 = \frac{2h}{3} \quad \& \quad \int_{\Omega} \varphi_2 = \frac{4h}{3}.$$

Beräknar $\nabla \varphi_1$ och $\nabla \varphi_2$ på resp. triangel och finner

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 = 4, \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2 = 4, \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 = -1.$$

Dvs

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} 1 \cdot \varphi_i \quad i = 1, 2$$

där $u_h = U_1\varphi_1 + U_2\varphi_2$ kan nu skrivas

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \frac{2h^2}{3} \\ \frac{4h^2}{3} \end{bmatrix} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Styvhetismatris} & & \text{Lastvektor} \end{array}$$

b) För felet gäller nu

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq C_i \|hR\|,$$

där $\|\cdot\|$ är $L_2(\Omega)$ -normen, C_i en interpolation konstant, h elementstorleken, och

$R + |R_1| + R_2$ är residualen.

$R_1 = f + \Delta u_h$ på resp. triangel, $R_2 = \max_{\partial K} \frac{|\nabla u_h|}{h_k}$, där $[\nabla u_h]$ är hoppet i ∇u_h tvärs randen ∂K av triangel K .

c) För L_2 -normsfelet gäller

$$\|u - u_h\| \leq C_i \|h^2 R\|.$$

d) för kvadratiska elementfunktioner gäller

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq C_i \|hR\|,$$

precis som för linjära, men R kan nu väntas vara mindre.

23. a) Utvidgar u_0 och v_0 udda, dvs sätter $\tilde{u}_0(x) = -u_0(-x)$ för $x < 0$, $\tilde{u}(x) = u(x)$ för $x > 0$, analogt för v . d'Alemberts formel ger nu lösningen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \{ \tilde{u}_0(x - ct) + \tilde{u}_0(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{v}_0(s) ds \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \{ u_0(x - ct) + u_0(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds, & \text{för } x > ct, \\ \frac{1}{2} \{ -u_0(ct - x) + u_0(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} v_0(s) ds, & \text{för } x < ct. \end{cases} \end{aligned}$$

Finner speciellt att $u(0, t) = \frac{1}{2} \{ -u_0(ct) + u_0(ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{ct}^{ct} v_0(s) ds = 0$ som önskat.

- b) Ansätter (för $x < ct$) modifierad lösning $w(x, t) = u(x, t) + \phi(x - ct)$, vilken vi vet löser ekvationen $\ddot{w} = c^2 w''$. Söker nu ϕ så att $w(0, t) = u(0, t) + \phi(-ct) = g(t)$, dvs $\phi(-ct) = g(t)$, dvs $\phi(s) = g(-s/c)$. Lösningen modifieras alltså för $x < ct$ till $u(x, t) + g(t - x/c)$.

25. a) Variationsformuleringen av problemet blir

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Gamma_N} gv,$$

för alla v sådana att $v = 0$ på Γ_D . Subtraherar motsvarande relation för U och $v \in V_h$ och erhåller felekvationen

$$\int_{\Omega} \nabla(u - U) \cdot \nabla v = 0,$$

för alla $v \in V_h$. Får nu

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - U)\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla(u - U) \cdot \nabla(u - U) = \int_{\Omega} \nabla(u - U) \cdot \nabla(u - v) \\ &\leq \|\nabla(u - U)\| \|\nabla(u - v)\|, \end{aligned}$$

för alla $v \in V_h$, varav den sökta olikheten följer.

- b) Visar $\|(u - v)'\| \leq \|hu''\|$. På delinterval i gäller $(u - v)'(x) = \int_{\xi_i}^x (u - v)'' = \int_{\xi_i}^x u''$, för någon punkt ξ_i i intervallet, enligt medelvärdesatsen. Det följer att

$$|(u - v)'(x)| \leq \int_{I_i} |u''| \leq \left(\int_{I_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{I_i} u''^2 \right)^{\frac{1}{2}} = h_i^{\frac{1}{2}} \left(\int_{I_i} u''^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

dvs

$$\int_{I_i} (u' - v')^2 \leq h_i^2 \int_{I_i} u''^2.$$

Summation över i ger

$$\|(u - v)'\|^2 \leq \|hu''\|^2,$$

vilket ger den sökta olikheten.

27. Istället för uppg. 27 i listan: Betrakta:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$$

där M är en positiv konstant

a) Antag att $M < 1$, lös ekvationen i R^2 med $f = g(x)\delta_0(y)$ där:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } |x| < 1, \\ 0 & \text{för } |x| \geq 1 \end{cases}$$

och $\delta_0(y)$ är en deltafunktion.

Ledning: Elementärlösning till $-\Delta$ gea i R^2 av:

$$E(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

b) Antag att $M > 1$, lös ekvationen i övre halvplan ($y > 0$) med $f = 0$ och följande randvillkor

$$u = g(x), \quad \text{för } y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{för } y = 0,$$

där $g(x)$ är given i deluppgift (a).

c) Bevisa att $E(x, y)$, givet i ledningen till (a) är verkligen en elementärlösning till $-\Delta$ i R^2 .

Lösning: Betrakta

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$$

a) $M < 1$

Gör variabelbytet

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\partial}{\partial x'_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2_1}, & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2_2} \\ &\Rightarrow \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_2} &= f(x'_1, x'_2) \end{aligned}$$

där $f(x'_1, x'_2) = g(x'_1)\delta(x'_2)$ och

$$g(x'_1) = \begin{cases} 1, & \text{för } |x'_1| < \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \\ 0, & \text{för } |x'_1| > \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Delta' u &= -f \\
\Rightarrow \\
u(z') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (-f(x')) \log \left(\frac{1}{|z' - x'|} \right) dx' = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x'_1) \log \left(\frac{1}{|(z'_1, z'_2) - (x'_1, 0)|} \right) dx'_1 = \\
&= +\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}} \log \left(|(z'_1, z'_2) - (x'_1, 0)| \right) dx'_1
\end{aligned}$$

$$u(z'_1, z'_2) = u\left(\frac{z_1}{\sqrt{1-M^2}}, z_2\right) \text{ ger sedan } u = u(z_1, z_2).$$

b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - (M^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\text{Sätt } c = \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, & x_2 > 0 \\ u = g(x_1), & x_2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & x_2 = 0 \end{array} \right.$$

d'Alemberts formel ger

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(g(x_1 - cx_2) + g(x_1 + cx_2) \right), \quad x_2 \geq 0$$

c) se boken.

29. Bevis: Se kurslitt.

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \int_0^1 v(0, s)w(0, s) \, ds, \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad f \in L_2(\Omega)$$

$$V = H^1(\Omega)$$

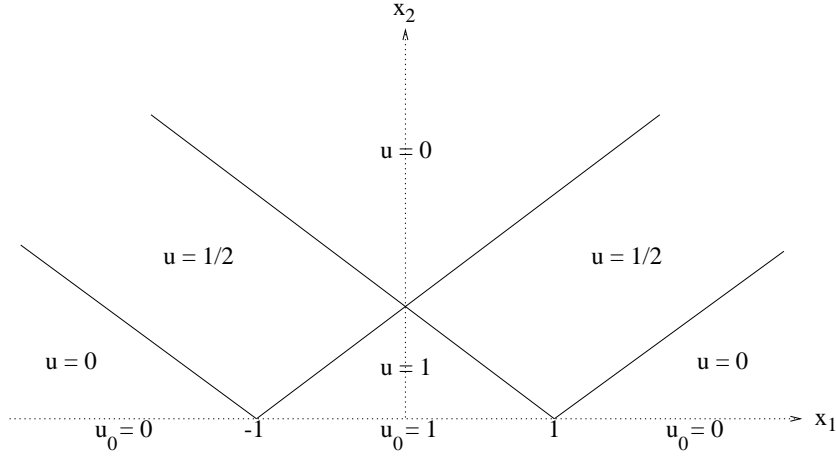


Figure 8:

$a(\cdot, \cdot)$ bilinjär och $L(\cdot)$ linjär klart

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^2 &= \int_0^1 \int_0^1 v(t, s)^2 ds dt = \int_0^1 \int_0^1 [v(0, s) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt']^2 ds dt \leq \\ &\leq 2 \left\{ \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 v(0, s)^2 ds dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt' \right]^2 ds dt}_{I_2} \right\} \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 v(0, s)^2 ds dt = \int_0^1 v(0, s)^2 ds$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt' \right]^2 ds dt \leq \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' \right] ds dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' ds \leq \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \\ &\therefore \int_{\Omega} v^2 \leq 2 \left(\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v + \int_0^1 v(0, s)v(0, s) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a(v, v)} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v + \int_0^1 v(0, s)v(0, s) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v + \frac{1}{4} \int_{\Omega} v^2 \geq \frac{1}{4} \|v\|_V^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \right| + \left| \int_0^1 v(0, s)w(0, s) ds \right| \leq c - s \leq \\ &\leq \|v\|_V \|w\|_V + \left(\int_0^1 v(0, s)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^1 w(0, s)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Men $v(t, s) = v(0, s) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt'$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} v(0, s)^2 &= 2 \left(v(t, s)^2 + \left[\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt' \right]^2 \right) \leq c - s \leq \\ &\leq 2 \left(v(t, s)^2 + \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Integrera (8) från $t = 0$ till $t = 1$:

$$v(0, s)^2 \leq 2 \left(\int_0^1 v(t, s)^2 dt + \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' \right) \quad (9)$$

Integrera (9) från $s = 0$ till $s = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(0, s)^2 ds &\leq 2 \left(\int_0^1 \int_0^1 v(t, s)^2 dt ds + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' ds \right) \leq \\ &\leq 2 \left(\int_{\Omega} v^2 + \int_{\Omega} \nabla v, \nabla v \right) = 2 \|v\|_V^2 \\ &\therefore \left(\int_0^1 v(0, s)^2 ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|v\|_V \end{aligned}$$

(8) ger därmed att

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \|v\|_V \|w\|_V + \sqrt{2} \|v\|_V \sqrt{2} \|w\|_V = 3 \|v\|_V \|w\|_V \\ |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_V \end{aligned}$$

\therefore Förutsättningarna till Lax-Milgram är uppfyllda.

MA