

Strängar

Vågekvationen för en ideal sträng

Betrakta en ideal sträng som är fast inspänd i bägge ändar (se Fig. 1). Strängen utför transversella svängningar, dvs utslaget är vinkelrätt mot strängens längdriktning. Att strängen är ideal betyder bland annat att den saknar styvhet och därmed inte kan ta upp böjpåkänningar. En ideal sträng kan rullas ihop till en rulle med godtyckligt liten radie vilket är långt ifrån fallet med verkliga strängar. En ideal sträng är vidare homogen, dvs strängen har överallt samma tvärsnitt A och linjära densitet ρ_l [kg/m]. Spännkraften i strängen är S . Vi antar också att strängen utför små svängningar kring jämviktsläget så att derivatan $\partial u/\partial x$ i varje punkt är liten. Vidare antas att ingen energi bortförs från systemet varken i form av interna förluster i strängen, via stöden eller utstrålat ljud.

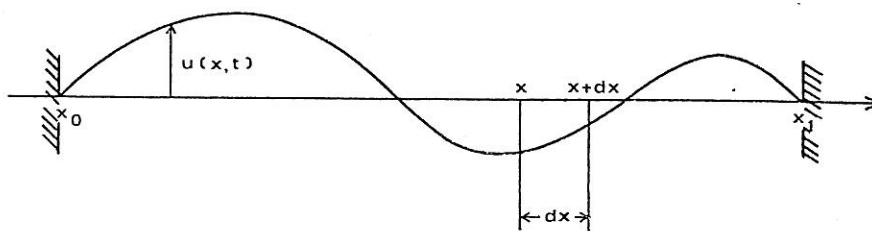


Fig. 1. Ideal sträng fast inspänd i bägge ändar.

Den längdändring som uppstår då strängen svänger kan tecknas

$$\Delta \ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx - (x_1 - x_0)$$

Eftersom $\partial u/\partial x$ antagits mycket liten blir $\Delta \ell \approx 0$ och följaktligen spännkraften S i strängen konstant, trots att strängen svänger. Vi betraktar nu elementarlängden ds av strängen, se Fig. 2.

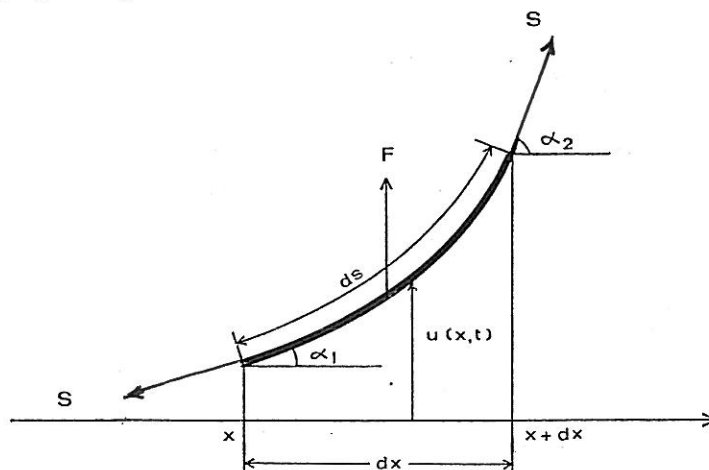


Fig. 2. Elementarlängden ds av den ideala strängen.

Kraftekvationen

$$F = ma \quad (2)$$

blir tillämpad på denna del av strängen

$$S \sin \alpha_2 - S \sin \alpha_1 = \rho_t ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

Eftersom strängen utför små svängningar är vinklarna α_1 och α_2 små och $\sin \alpha$ kan ersättas med $\tan \alpha$ och strängelementets längd ds med dx

$$S(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) = \rho_t dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Lutningen i punkten x är

$$\tan \alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

I punkten $x + dx$ har lutningen ändrat sig till

$$\tan \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \quad (6)$$

där den andra termen är ändringen i lutning per längdenhet multiplicerat med längden dx

Ekv. (4) ger nu

$$S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \rho_t dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

Ekvation (8) är vågekvationen för en ideal sträng. Den har samma form som vågekvationen för plana ljudvågor i luft. Konstanten c är vågens utbredningshastighet, i detta fall den hastighet som en transversell störning ("puls") rör sig med längs strängen

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho_t}} \quad (9)$$

Fortskridande vågor på ideala strängar

Den allmänna lösningen till vågekvationen är av formen

$$u(x, t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x)$$

vilket lätt kan prövas genom insättning

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f_1' + f_2'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1'' + f_2''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(f_1'' + f_2'')$$

En gemensam egenskap för alla funktioner av variabeln $ct-x$ är att funktionen antar samma värde för en ändring Δt av tiden som för en ändring $\Delta x = -c\Delta t$ av rumskoordinaten. Om vi vill betrakta en våg som utbreder sig åt höger längs positiva x -axeln i Fig. 3 kan vi antingen ställa oss vid en viss position x_1 och vänta. Efter tiden Δt passerar en viss punkt på vågen, t ex toppen. Istället för att vänta kunde vi direkt ha tagit ett steg $c\Delta t$ åt vänster och fått sett samma punkt. Vågen utbreder sig alltså åt höger med den konstanta hastigheten c utan att ändra form.

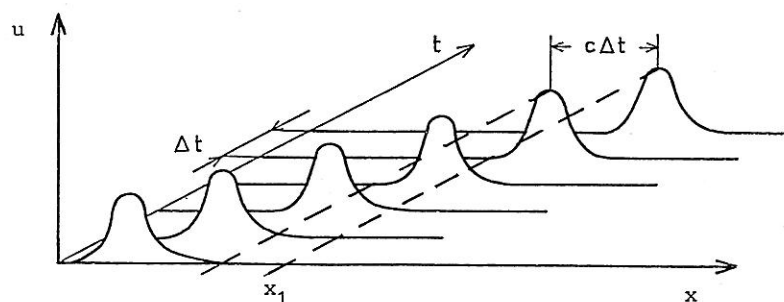


Fig. 3. En våg $f_1(ct-x)$ utbreder sig längs strängen.

Verkliga strängar är inspända i bägge ändar vilket gör att funktionerna f_1 och f_2 inte får vara helt godtyckliga utan måste uppfylla vissa randvillkor. För en sträng med längden L som är fast inspänd gäller

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (14)$$

Randvillkoret

$$u(0, t) = f_1(ct-0) + f_2(ct+0) = 0 \quad (15)$$

betyder att

$$f_2(ct+x) = -f_1(ct-x) \quad (16)$$

och $u(x, t)$ blir

$$u(x, t) = f_1(ct-x) - f_1(ct+x) \quad (17)$$

Ekvation (17) ska tolkas som en våg $f_1(ct-x)$ som rör sig i positiva x-axelns riktning och en annan våg $-f_1(ct+x)$ med samma form men med omvänt tecken (inverterad) som rör sig i motsatta riktningen, se Fig. 4(a).

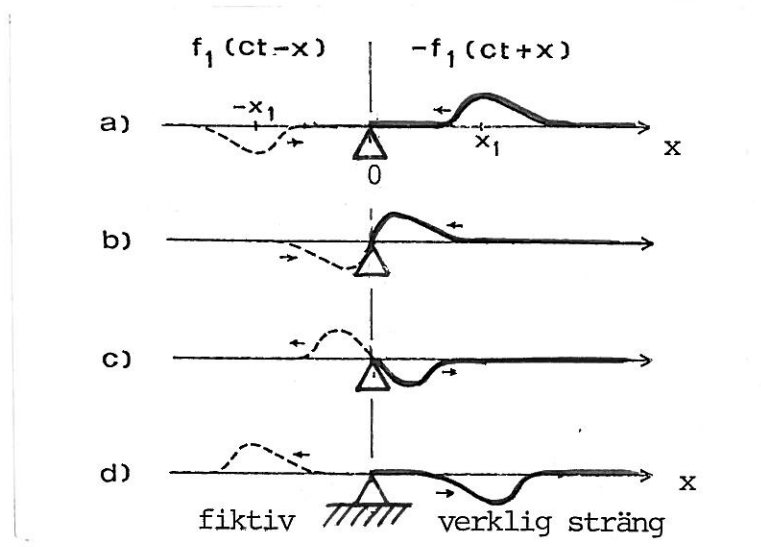


Fig. 4. Reflexion av en infallande våg i strängens infästningspunkt vid $x = 0$.

Antag att vågen $-f_1(ct+x)$ befinner sig vid en viss punkt x_1 på strängen vid $t = 0$. Vågen $f_1(ct-x)$ måste vid samma tidpunkt befinna sig i punkten $-x_1$, dvs på en fiktiv sträng utanför den verkliga strängens infästningspunkt (se Fig. 4 a). En observatör ser endast vågen $-f_1(ct+x)$ som rör sig åt vänster allt eftersom t ökar. Den verkliga och fiktiva vågen möts vid $x = 0$ och superponeras på varandra med resultatet att $u(0,t) = 0$ för alla t (se Fig. 4 b,c). Den högergående vågen $f_1(ct-x)$ fortsätter in på den verkliga strängen och $-f_1(ct+x)$ försvinner ut på den fiktiva delen av strängen (se Fig. 4 c, d). Observatören finner att den ursprungliga vänstergående vågen har reflekterats i infästningspunkten och är på väg tillbaka åt höger. Vågen har samma form som tidigare men är inverterad.

Ett annat sätt att beskriva reflexionsförloppet är att säga att när den infallande vågen träffar ett stöd där strängen är infäst så måste stödet utveckla en kraft på strängen som motverkar den infallande vågen så att utslaget i infästningspunkten alltid är noll. När stödet utvecklar denna motverkande kraft genererar det den reflekterade vågen.

I motsatta änden av strängen ger randvilkoret $u(L,t) = 0$ på motsvarande sätt upphov till en reflexion av vågen. En våg som startar åt höger vid $x = 0$ når efter tiden $t = L/c$ den borte infästningspunkten, reflekteras och vänder tillbaka inverterad åt vänster och reflekteras återigen vid $x = 0$ efter tiden $t = 2L/c$. Där inverteras den igen och blir nu rättvänd. Vågrörelsen på en ideal sträng som är fast inspänd blir därför periodisk med periodtiden $T = 2L/c$ oberoende av vågens form och hur den startats.

Stående vågor

Vågorna som reflekteras fram och åter på strängen kan ses som en serie av stationära amplitudenvelopper med individuella frekvenser ("stående vågor") på strängen. En lösning till vågekvationen enligt detta synsätt bygger på en så kallad separationsansats

$$u(x,t) = \sum_n \Psi_n(x) q_n(t)$$

där $\Psi_n(x)$ beskriver de fixa amplitudfördelningarna längs strängen (oberoende av t) och $q_n(t)$ tidsförloppen (oberoende av x). Genom att derivera ansatsen och sätta in i vågekvationen fås för en fast inspänd sträng med längden L

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

där

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{n\pi c}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Genom att sätta in uttrycket för vågens utbredningshastighet c får vi

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S}{\rho_t}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{A\sigma}{A\rho}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$A = \pi \frac{d^2}{4}$ är tvärsnittsarean för en sträng med diametern d

$\sigma = \frac{S}{A}$ är dragpåkänningen [N / m^2]

ρ är strängmaterialets densitet [kg / m^3]

Frekvenserna f_n kallas strängens egenfrekvenser, eller något oegentligt resonansfrekvenser. Om strängen får svänga fritt, dvs utan påverkan av någon yttre drivande kraft, är strängen hänvisad till att svänga med just dessa egenfrekvenser.

I spektrum för det utstrålade ljudet från strängen benämns komponenten med den lägsta frekvensen ofta *grundton* (grundtonsfrekvensen f_0), och de övriga *övertoner*. Alternativt benämns alla egenfrekvenserna för *deltoner* och grundtonen blir då delton 1. Ibland är det praktiskt att ge grundtonsfrekvensen för en ideal sträng benämningen f_1^o för att särskilja den från en verklig strängs grundtonsfrekvens

$$f_1^o = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{S}{\rho_t}}$$

Det är värt att lägga märke till att strängens diameter inte är en grundläggande parameter för att påverka grundtonsfrekvensen och övriga egenfrekvenser. Om diametern ökas blir strängen visserligen tyngre (ρ_l ökar) men det kan kompenseras med en högre dragspänning för att bibehålla en viss f_1^0 . Den ökade dragspänningen kan dock leda till att σ överskrider brottgränsen och att strängen går av. Därför är det förhållandet σ/ρ_l som är den primära designparametern för grundtonsfrekvensen vid homogena (ospunna) strängar. Andra faktorer, främst styvheten och karaktäristiska impedansen, sätter villkor för diametern.

För en fast inspänd, ideal sträng blir egenfrekvenserna heltalsmultiplar och deltonerna kallas då *harmoniska*. Detta är ett mycket sällsynt. Förutom den ideala strängen så är det endast rör med konstant (eller koniskt varierande) tvärsnitt som ger harmoniska egenfrekvenser. Strängen och röret utgör grundelementen i alla traditionella musikinstrument som alstrar toner med en tydlig tonhöjd.

Svängningarnas fixa amplitudfördelningar längs strängen $\Psi_n(x)$ kallas *egensvängningsformer* eller ståendevågmönster. För den ideala strängen blir de utsnitt ur en sinusfunktion (multiplar av halva våglängder), se Fig. 5.

$$\Psi_n(x) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

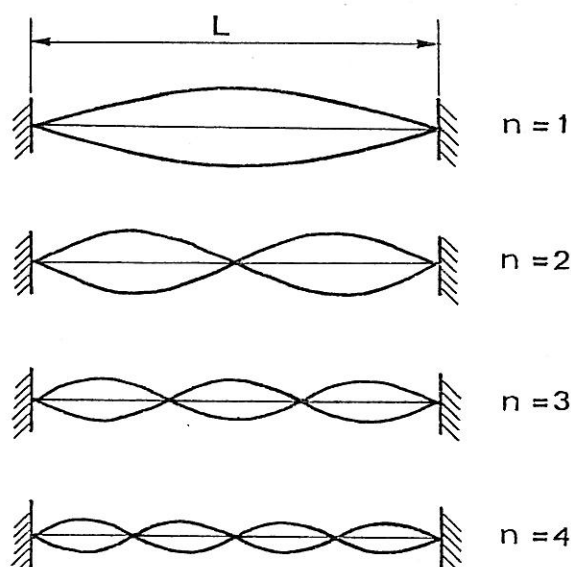


Fig. 5. De fyra lägsta egensvängningsformerna för en ideal sträng som är fast inspänd.

Avståndet mellan två noder eller två bukar i alla egensvängningarna är en halv våglängd. Om en av egenfrekvenserna f_n är känd går det därigenom att bestämma utbredningshastigheten $c = f\lambda$, och därmed även spännkraften S .

Det inbördes förhållandet mellan egensvängningarnas amplituder bestäms av hur svängningen startats. Med kännedom om strängens begynnelsevärden $u(x,0)$ och $\partial u/\partial x(x,0)$ kan koefficienterna A_n och B_n bestämmas.

Det är bara för ideala strängar och rör som egensvängningsformerna blir delar av sinusfunktioner. För ett rör som är öppet i bägge ändar motsvarar egensvängningsformerna i Fig. 5 tryckfördelningar. För andra system som stavar och membran blir $\Psi_n(x)$ mer avancerade funktioner (sinh, Bessel).

Styva strängar

Verkliga strängar avviker från det ideala fallet på flera punkter. Två viktiga skillnader är strängens styvhet och inspänningen vid ändarna (stöden). Verkliga strängar är inte idealt böjliga utan motsätter sig deformationen när en våg passerar på strängen genom att alstra böjpåkänningar (interna skjuvkrafter). Strängen sägs ha en viss böjstyvhet, styv sträng (eng. "stiff string").

I den ideala strängen kommer den återförande kraften när strängen avlägsnat sig ur jämviktsläget enbart från en komponent av spännkraften S . I verkliga strängar bidrar böjstyvheten med en återförande kraft och strängen kommer att återta jämviktsläget snabbare, periodtiden kortas och egenfrekvenserna blir högre än för den ideala strängen. Bidraget från böjstyvheten blir större ju tvärare strängen böjs. Det betyder att frekvenshöjningen blir större för de högre egensvängningarna som har kortare våglängd på strängen. En styv sträng får därmed inte harmoniska övertoner. Fenomenet kallas *inharmonicitet* och syns i spektrum som en "sträckning" av deltonsmönstret, de högre deltonerna hamnar på successivt allt längre frekvensavstånd (se Fig. 6).

Ur vågutbredningssynpunkt yttrar sig strängens styvhet som dispersion, dvs utbredningshastigheten c är inte konstant utan ökar med frekvensen. Eftersom stränglängden är fix kommer de högre egenfrekvenserna att skiftas uppåt på grund av att rundturstiden på strängen - vilken bestämmer egensvängningens periodtid - kortas något.

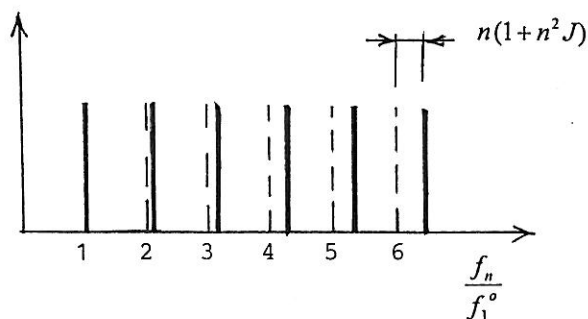
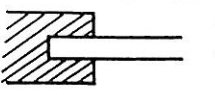


Fig. 6. Jämförelse mellan harmoniskt (streckat) och inharmoniskt spektrum (heldragen).

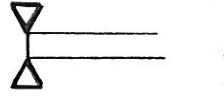
Hur stor höjningen blir beror inte bara på strängens egenskaper utan till viss del även på infästningen, fast inspänning ("clamped") eller ledad ("pinned").

Vid stöden ($x = 0$ och L) gäller randvillkoren

fast $\begin{cases} u(x, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$



ledad $\begin{cases} u(x, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$



En god approximation av egenfrekvenserna f_n för en styv sträng som gäller för både för fast och ledad inspänning är

$$f_n = n f_1^o \sqrt{1 + n^2 B} \approx n f_1^o \left(1 + \frac{1}{2} n^2 B\right) = n f_1^o (1 + n^2 J)$$

Relaterat till den verkliga strängens (redan sträckta) grundtonsfrekvens f_1 blir

$$f_n \approx n f_1 (1 + (n^2 - 1) J)$$

$$B = \frac{\pi^3 d^4 E}{64 S L^2} = \frac{\pi d^2 E}{16 \sigma L^2}$$

$$B = 2J$$

B, J	inharmonicitetskoefficienter
f_1^o	grundtonsfrekvensen för en ideal sträng
d	strängdiameter
E	elasticitetsmodul
S	dragkraft
L	stränglängd
σ	dragpåkänning

Inharmonicitetskoefficienten B bestäms av strängens dimensioner och material. B ökar med grövre strängdiameter d och styvare material E , men kan å andra sidan hållas nere genom att göra strängen lång L , och och hårt spänd σ . En viss grad av inharmonicitet är önskvärd i pianosträngar ("pianotråd"). Ett typiskt värde är $J = 200 \cdot 10^{-6}$ i mellanregistret. För stråkinstrument å andra sidan är redan en liten inharmonicitet katastrofal för spelegenskaperna.

Man kan notera att om ett stränginstrument tillåts sjunka i stämning (S sjunker och därmed även σ) så blir instrumentet inte bara ostämt utan äver mer inharmoniskt ("sommarsugepiano").