Numeriska metoder grundkurs I
Övning 3 för Bio3

Övningsgrupp 2

Johannes Hjorth
hjorth@nada.kth.se
Rum 4538 på plan 5 i D-huset
08 - 790 69 02

Kurshemsida:
`http://www.nada.kth.se/kurser/kth/2D1210/05-06/BIO/`

Material utdelat på övningarna:

`http://www.nada.kth.se/~hjorth/teaching/numbio05`

Fyra feltyper

- Indatafel
- Beräkningsfel
- Trunkeringsfel
- Presentationsfel

Om felet är mindre än $0.5 \cdot 10^{-d}$ säger vi att vi har d korrekta decimaler.

Felfortplantning

Absolut fel: $e_x = \tilde{x} - x$ där $|e_x| \leq E_x$

Relativt fel: $r_x = \frac{\tilde{x}-x}{x}$ där $|r_x| \leq R_x$

Här betyder $\tilde{x}$ närmevärde till x.

	Addition	Subtraktion
beräkning	$z = x + y$	$z = x - y$
absolutfel	$e_z = e_x + e_y$	$e_z = e_x - e_y$
felintervall	$E_z = E_x + E_y$	$E_z = E_x + E_y$

För multiplikation $z = x \cdot y$ blir det lite knepigare

$\tilde{z} = \tilde{x} \cdot \tilde{y} = (x+e_x)(y+e_y) = xy + xe_y + e_x y + e_x e_y \approx xy + xe_y + ye_x \Rightarrow e_x \approx xe_y + ye_x \Rightarrow \frac{e_z}{z} \approx \frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y}$

Vi har att relativa felen adderas $R_z \approx R_x + R_y$.

Hur blir det för det vid division $z = x/y$, skalning $z = \alpha \cdot x$ och exponentiering $z = x^n$?

Tips: Ersätt $\tilde{x}$ med $x + e_x$, tex $\tilde{z} = \tilde{x}^n = (x + e_x)^n$ och ignorera termerna $O({e_x}^2)$.

Felfortplantningsformeln

Från bland annat Taylor vet vi

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x \Longrightarrow e_f \approx f'(x)e_x \Longrightarrow e_x \approx \frac{e_f}{f'(x)}$$

För felgränserna får vi därmed följande

$$E_f \approx \max_x |f'(x)| \cdot E_x \Longrightarrow E_x \approx \frac{E_f}{\min |f'(x)|}$$

Vi kan skriva felfortplantningsformeln (observera absolutbeloppet eftersom vi pratar felgränser här):

$$E_f \approx |f'(\tilde{x})| \cdot E_x$$

Klurighet! Ifall $f'(x) = 0$ får vi använda oss av andra termen i taylorutvecklingen!

$$e_f \approx f'(x) \cdot e_x + \frac{1}{2} \cdot f''(x)e_x^2 + \dots$$

Kan vi utnyttja detta?

Antag att felet är proportionellt mot $c \cdot h^p$.

$F(h)$ betyder här beräkning av F med steglängd h, exempelvis vid frammåtskattning av derivata.

$$\begin{aligned} F(2H) &= A + c(2H)^p \\ F(H) &= A + cH^p \end{aligned}$$

Vi kan då skatta felet cH^p på följande sätt

$$F(2H) - F(H) = A + c(2H)^p - (A + cH^p) = 3cH^p$$

det vill säga

$$cH^p = \frac{F(2H) - F(H)}{3}$$

Vi har en skattning på felet. Vill vi göra värdet på $F(H)$ bättre drar vi bort vår skattning av felet från vårt värde på $F(H)$. *Typiskt tentatal!*

Dåligt konditionerat

Om små fel i indata resulterat i stora fel i utdata säger vi att problemet är dåligt konditionerat.

$$C = \frac{R_{ut}}{R_{in}}$$

Vad ska vi se upp för?

Vi får **kancellation** om $a \approx b$ och vi sedan beräknar $c = a - b$. Exempelvis $3.14159 - 3.1415 = 0.00009$.

Ett annat problem är **utskiftning**. Om $a \gg b$ då blir $a + b \approx a$.

Mer om konditionstal

L2-normen $||x||_2$ till en vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ defineras som

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Utifrån den definitionen kan vi definera L2-normen för en matris

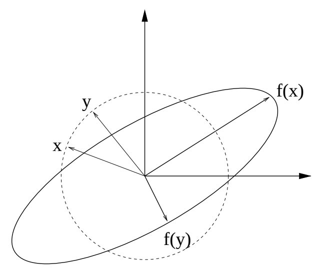
$$||A||_2 = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Ett annat sätt att beräkna konditionstalet är

$$cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

Användbara `matlab`-kommandon: `norm` och `cond`

Grafisk tolkning av konditionstal



Vi vill veta hur känsligt vårt problem är för störningar i indata. För enkelhets skull tittar vi bara på störningar x och y av längd ett (dessa ligger på streckade cirkeln i figuren).

När vi beräknar felen i utdata $f(x)$ och $f(y)$ så transformeras störningar x och y till olika punkter på elipsen. Beroende på var vi hamnat så har vi förlängt eller förkortat den ursprungliga störningen. Förlänger vi den förstorar vi också felet, förkortare vi den minskar vi därmed felet.

Konditionstalet ska ange hur illa det kan gå som värst och svarar alltså mot den största förlängningen.

För vilken störningsvektor i figuren får vi största felet?

tridia.m

```
function x = tridia(d,p,q,b)
% Beräknar lösningsvektorn x till tridiagonalt system
% med diagonal d, superdiagonal p, subdiagonal q och högerled b
    n=length(b);  r=d; g=b; x=b;
    for i=2:n
      i1=i-1;  mult=q(i1)/r(i1);           % Gausseliminera
      r(i)=d(i)-mult*p(i1); g(i)=b(i)-mult*g(i1);
    end
    x(n)=g(n)/r(n);                        % Bakåtsubstituera
    for i=n-1:-1:1, x(i)=(g(i)-p(i)*x(i+1))/r(i); end
```

Vi kan med hjälp av `tridia.m` lösa systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
>> x = tridia([1 2 3 4 5], [9 8 7 6], [5 4 3 6], [-7 -5 4 1 3])

x =

   -0.9002   -0.6778    0.1070    0.9128   -0.4954
```

Hur många additioner och multiplikationer tar det?

Exempel 3.3

```
A = [1 -2 0 3 0; 0 -1 2 0 -3; -2 4 1 -8 0; 0 2 -4 -1 8; 3 -6 -2 13 1];
b = [-4; -8; 9; 20; -12];

%Lös systemet
x = A\b

%Beräkna normerna
nx = norm(x, inf);
nb = norm(b, inf);
nA = norm(A, inf);

% Verifiera att nA*nx >= nb gäller
disp('    nA    nx  nA*nx   nb')
disp([nA nx nA*nx nb])

%Stör och lös det nya systemet
b2 = [-5; -9; 10; 21; -13];
x2 = A\b2

%Beräkna nya normerna
nx2 = norm(x2, inf);
nb2 = norm(b2, inf);

disp('   nA        nx       nA*nx      nb')
disp([nA nx2 nA*nx2 nb2])

%Konditionstalet = Relfelut/Relfelin
relfelut = norm(x2-x,inf)/norm(x,inf);
relfelin = norm(b2-b,inf)/norm(b,inf);
kond = relfelut/relfelin

%Jämför med matlabs inbyggda metod
kondalt = cond(A, inf)
%Matlab beräknar den mha
k2 = norm(A,inf)*norm(inv(A),inf)
%Uppskatta normen för linjärt system
k3 = condest(A)
```

Kör man koden får man (utskriften är städad)

```
x =  4     4     1     0     2

    nA    nx  nA*nx   nb
    25     4   100    20


x2 = 6.0000 7.0000 2.0000 1.0000 2.0000

   nA        nx       nA*nx      nb
   25.0000    7.0000  175.0000   21.0000

kond = 15.0000

kondalt = 1.1500e+03

k2 = 1.1500e+03

k3 = 975.0000
```

Vi ser att räkningarna ger olika konditionstal

Vår första skattning var inte speciellt exakt.