

Numeriska metoder grundkurs I

Övning 6 för Bio3

Övningsgrupp 2

Johannes Hjorth
hjorth@nada.kth.se
Rum 4538 på plan 5 i D-huset
08 - 790 69 02

Kurshemsida:
<http://www.nada.kth.se/kurser/kth/2D1210/05-06/BIO/>

Material utdelat på övningarna:
<http://www.nada.kth.se/~hjorth/teaching/numbio05>

Exempelsamlingen 7.4

Vi har en behållare med vätskehöjden $h \in [0, 20]$, tvärsnittsarean $A = 0.8$, inflödet $Q_{in} = 1 - \frac{h}{20}$ och utflödet $Q_{ut} = C\sqrt{2gh}$. Vidare är $C = 0.1$ och $g = 9.81$.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{in} - Q_{ut}}{A}$$

Vårt system är stationärt när $\frac{dh}{dt} = 0$, vilket svarar mot att inflödet och utflödet är lika stora.

$$C\sqrt{2gh} = 1 - \frac{h}{20}$$

Detta kan skrivas på formen,

$$\frac{h^2}{400} - h\left(\frac{1}{10} + 2gc^2\right) + 1 = 0$$

Matlabkod

Vi skriver funktionen först

```
function f = exs74fun(t,h)
c = 0.1; a = 0.8; g = 9.81;
```

```
Qut = c*sqrt(2*g*h);
Qin = 1 - h/20;
```

```
f = (Qin - Qut)/a;
```

Vi använder oss av ODE23 för att lösa differentialekvationerna

```
clear, clf
```

```
[t1 h1] = ode23('exs74fun', [0 25], 0);
[t2 h2] = ode23('exs74fun', [0 25], 3);
[t3 h3] = ode23('exs74fun', [0 25], 10);
```

```
hold on
plot(t1,h1)
plot(t2,h2,'--')
plot(t3,h3,':')
```

```
xlabel('t')
ylabel('h')
title('Exempelsamlingen 7.4')
```

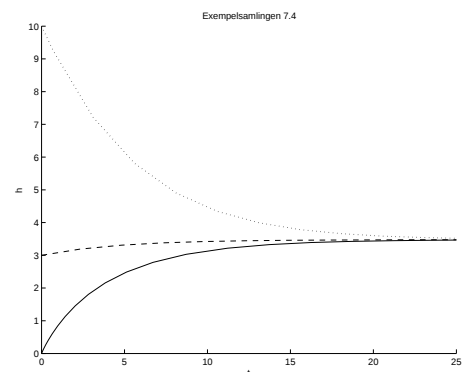
```
p = [1/400 -1/10-0.1^2*2*9.81 1];
display('Stationära lösningarna är')
roots(p)
```

Resultat

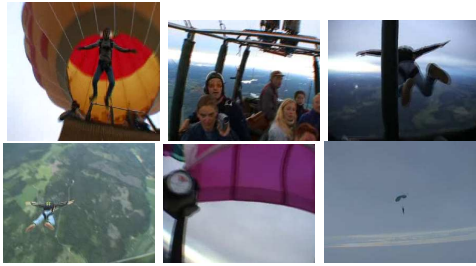
Vi kör koden i matlab

```
>> exs74
ans =
Stationära lösningarna är
ans =
    115.0018
     3.4782
```

Här är det endast 3.48 som är en tillåten rot, det andra är en falsk rot som uppkom vid kvadreringen.



Exempelsamlingen 7.11



Talet 7.11 är roligare, här har vi någon däre som hoppar från en ballong. Hans fall kan skrivas

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = k \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 - mg$$

Notera att vi har två olika luftmotståndskoefficienter k_f och k_s beroende på om det är fritt fall eller fall med skärm. Efter 30 sekunder utvecklas skärmen, vilken höjd är han på då och när slår han i backen? Hopphöjden är 2000 meter, terminal velocity är 50 m/s och med skärm 5 m/s.

Vill ni se filmen (doktorandkompis som hoppar) så finns den på

<http://www.nada.kth.se/~hjorth/movies/>

Handarbete

Vi börjar med att ta reda på luftmotståndskoefficienterna k_f och k_s .

$$\frac{dh}{dt} = v_f \quad \frac{d^2 h}{dt^2} = 0$$

$$k_f v_f^2 - mg = 0 \Rightarrow k_f = \frac{mg}{v_f^2}$$

Vi skriver om som ett första ordningens system

$$u_1 = h \quad u_2 = \frac{dh}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{k}{m} u_2^2 - g \end{aligned}$$

Vår funktion ser då ut som

```
function f = exs711fun(t,u)
global k m g
```

```
f = [u(2) (k/m*u(2)^2 - g)]';
```

Matlabkoden

```
clear, clf
global k m g;

tol = odeset('RelTol',1e-4);

tskarm = 30;
tnaramark = 150;

m = 75; g = 9.81;
vf = 50; vs = 5;

kf = m*g/vf^2;
ks = m*g/vs^2;

k = kf;
[t1 u1] = ode45('exs711fun', [0 tskarm], [2000 0]',tol);

n1 = length(t1);

k = ks; % Fallskärmen utlöses
[t2 u2] = ode45('exs711fun', [tskarm tnaramark], u1(n1,:)',tol);

n2 = length(t2);

% Nära marken, vi stegar oss fram sista biten med runge-kutta
% eftersom vi inte vet vid vilken tid vi slår i backen

t = t2(n2);
u = u2(n2,:)';
h = 0.5;

u3 = []; t3 = [];
```

```
while(u(1) > 0)
    k1 = exs711fun(t,u)*h;
    k2 = exs711fun(t+h/2, u+k1/2)*h;
    k3 = exs711fun(t+h/2, u+k2/2)*h;
    k4 = exs711fun(t+h, u+k3)*h;

    u = u + 1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    t = t + h;
    u3 = [u3; u'];
    t3 = [t3; t];
end

n3 = length(t3);

t = [t1; t2; t3];
h = [u1(:,1); u2(:,1); u3(:,1)];

plot(t,h)
axis([0 165 0 2000])
xlabel('tid')
ylabel('höjd')
title('Exempelsamlingen 7.11')

display('Fallskärmen utlöstes på höjden och vi når marken vid med hastigheten')
display([u1(n1,1) t3(n3) u3(n3,2)])

% Vi kör nu hela andra halvan av hoppet med Ode45

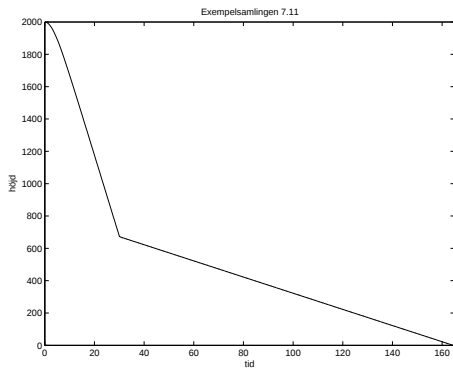
tend = t3(n3);
[ta ua] = ode45('exs711fun', [tskarm tend], u1(n1,:)', tol);
na = length(ta);

display('Höjden över marken, tiden för nerslag, hastigheten')
display([ua(na,1) ta(na) ua(na,2)])

hold on
plot(ta,ua(:,1), 'r')
```

Vi kör koden...

```
>> exs711
ans =
Fallskärmen utlöstes på höjden och vi når marken vid med hastigheten
ans =
    676.6318    164.5000    -5.0000
ans =
Höjden över marken, tiden för nerslag, hastigheten
ans =
    -0.2129    164.5000    -5.0000
```



Exempel 7.12

exs712fun.m

```
function f = exs712fun(x,u)

f = [u(2); 3*u(1)*u(2)/(1+x^2) - 2*u(1)^2; 2*pi*u(1)*sqrt(1+u(2)^2)];
```

exs712.m

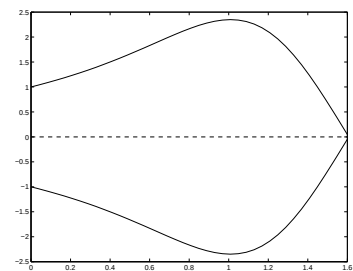
```
clear, clf

[x u] = ode45('exs712fun', [0 1.6], [1; 1; 0]);

plot([0 1.6], [0 0], '--', x, u(:,1), x, -u(:,1))
rotationsytan = u(length(x),3)
```

Vi kör koden

```
>> exs712
rotationsytan =
    36.9299
```



Exempel 7.10

exs710fun.m

```
function f = exs710fun(t,u)

f = [u(2); -2*t*u(2)-u(1)^2];
```

exs710.m

```
clear,clf
format long
format compact

tol1 = odeset('RelTol',1e-4);
tol2 = odeset('RelTol',1e-7);

A = 0.21;

[x1 u1] = ode45('exs710fun', [0.3 10], [0.1; A], tol1);
[x2 u2] = ode45('exs710fun', [0.3 10], [0.1; A], tol2);

n1 = length(x1);
n2 = length(x2);

y1 = u1(:,1);
y2 = u2(:,1);

plot(x1,y1, x2,y2,':r')
title('Exempelsamlingen 7.10')

display('Ode45 med reltol 1e-4')
u1(n1,1)
display('Ode45 med reltol 1e-7')
u2(n2,1)
```

Vi kör koden

```
>> exs710
ans =
Ode45 med reltol 1e-4
ans =
    0.18388382227851
ans =
Ode45 med reltol 1e-7
ans =
    0.18388373586053
```

