

Hemuppgift 1 Hitta antalet inverterbara $n \times n$ matriser i $\mathbb{Z}_p$

En matris är inverterbar om dess rader är linjärt oberoende. Vi löser uppgiften genom att räkna ut hur många k -tupler av linjärt oberoende vektorer det finns i $\mathbb{Z}_p^n$ för varje k . För $k = n$ kommer varje sådan n -tupel svara mot exakt en matris.

Om $k = 1$ finns det p^n vektorer totalt, av dessa är enbart noll-vektorn linjärt beroende med sig själv, alltså $p^n - 1$. För $k = 2$ använder vi multiplikationsprincipen: vi väljer den första vektorn på $p^n - 1$ sätt, den andra får inte vara en skalär gånger den första, alltså $p^n - p$ sätt att välja den andra och $(p^n - 1)(p^n - p)$ totalt. Man kan fortsätta resonemanget för att få att för k finns det

$$N_k = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{k-1})$$

k -tupler av linjärt oberoende vektorer. Vi verifierar det med induktion: för $k + 1$ väljer vi ut de första k på N_k sätt. Därefter får den sista inte vara en linjärkombination av de k första, det finns exakt p^k sådana linjärkombinationer (alla är olika eftersom vektorerna är linjärt oberoende), alltså finns det $p^n - p^k$ sätt att välja den sista vektorn. Om vi låter $k = n$ har vi $N_n = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1})$.

Hemuppgift 2 Skriv ett program för att beräkna matrissrang (med den enklast tänkbara metoden: Gausselimination och räkna nollrader)

Ingen gjorde det. Försöker igen någon annan gång.

Definition av linjär avbildning utifrån matriser

Exempel 1. Ett exempel av en linjär avbildning är den som är given av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Om (b_1, b_2, b_3) är en bas i ett 3-dimensionellt vektorrum så får vi med A

$$(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = (b_1 + 2b_2 + 3b_3, 4b_1 + 5b_2 + 6b_3)$$

Trace

Vi visade att $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$.

Matrisgrupper

Vi definierade $GL(n, \mathbb{K})$ som gruppen av alla $n \times n$ matriser med koefficienter över $\mathbb{K}$ och visade att det blir en grupp.

Vi definierade $SL(n, \mathbb{K})$ som gruppen av alla $n \times n$ matriser med determinant 1 och koefficienter i $\mathbb{K}$. Vi visade att SL var en normal delgrupp av GL och att

$$GL(n, \mathbb{K}) / SL(n, \mathbb{K}) \cong K^*$$

Vi definierade $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^t = I\}$, $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ och $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A\overline{A}^t = I\}$, $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

Matrisfaktorisering

Vi pratade om faktorisering i elementära matriser (varje elementär matrisoperation - multiplikation av rad med skalär, addition av rad $\times$ skalär till annan rad, byta plats på två rader) är ekvivalent med multiplikation med en viss typ av matris från vänster.

Vi nämnde också rangfaktorisering av matriser.