1 Idéer och redskap

1.1 I hur stor omgivning av $x = 0$ erhåller man fyra respektive sex korrekta decimaler med approximationerna

a) $\sin x \approx x$ b) $\cos x \approx 1 - x^2/2$ c) $1/(1 - x^2) \approx 1 + x^2$

1.2 Vi vill illustrera begreppet lokal linearisering genom att i närheten av $x = 1$ ersätta funktionen $y = \sqrt{x}$ med en rät linje.

a) Bestäm den räta linje som går genom punkterna $(1 - h,\ \sqrt{1-h})$ och $(1,\ 1)$. Storheten h förutsätts vara ett litet tal. Bestäm därefter den maximala avvikelsen, på intervallet $1-h \leq x \leq 1$, mellan $y = \sqrt{x}$ och den approximerande räta linjen. Ställ upp en tabell över den maximala avvikelsen för några olika h-värden, t.ex. 10^{-k}, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Verifiera resultaten ovan med hjälp av serieutveckling, dvs visa att den maximala avvikelsen uppför sig som $ch^p + \ldots$, och bestäm numeriska värden för c och p.

1.3 Vi vill beräkna $y'(a)$ när $y(x)$ är känd i x-värdena a, $a+h$, $a+2h, \ldots$. Låt y_i beteckna tabellvärdet $y(a + i \cdot h)$, $i = 0,\ 1,\ 2 \ldots$

a) En grov approximation till $y'(a)$ är $(y_1 - y_0)/h$. Visa med taylorutveckling att avvikelsen $\frac{1}{h}(y_1 - y_0) - y'(a) \approx c \cdot h^p$ där p är ett heltal, vilket?

b) En bättre approximation till $y'(a)$ är $\frac{1}{2h}(-y_2 + 4y_1 - 3y_0)$. Visa med taylorutveckling att avvikelsen mellan detta uttryck och $y'(a)$ kan skrivas på formen $c \cdot h^p$. Vilket värde gäller för p nu?

c) Skriv ett MATLAB-program som utnyttjar differensuttrycken för att beräkna $y'(7)$ då $y(x) = ((x-7)^{5/2} + 2 \sin \pi \sqrt{x})/(\sqrt{x + 4 \ln (x - 2\pi)} - 1)$. Använd först $h = 0.04$, därefter $h = 0.02$, 0.01 och 0.005.

Tabellera resultaten samt avvikelsen från det analytiskt beräknade derivatavärdet -1.68043.

1 Idéer och redskap

1.1 a) $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - + \ldots$ Serien är alternerande, och trunkeringsfelet kan skattas med $|x|^3/6$. För att detta ska vara mindre än $0.5 \cdot 10^{-4}$ krävs $|x| < 0.0669$. För att felet ska vara mindre än $0.5 \cdot 10^{-6}$ krävs $|x| < 0.0144$.

b) $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! + - \ldots$ som är alternerande och felet kan skattas med $x^4/24$. För att det ska understiga $0.5 \cdot 10^{-4}$ krävs $|x| < 0.186$. För att det ska understiga $0.5 \cdot 10^{-6}$ krävs $|x| < 0.0588$.

c) $1/(1-x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots$ Använder man bara $1 + x^2$ blir trunkeringsfelet $x^4 + x^6 + x^8 + \ldots = x^4/(1-x^2)$. För att detta ska vara mindre än $0.5 \cdot 10^{-p}$ krävs $x^4 < (1-x^2) \cdot 0.5 \cdot 10^{-p}$.
Härav följer $x^2 < -0.25 \cdot 10^{-p} + \sqrt{(0.25 \cdot 10^{-p})^2 + 0.5 \cdot 10^{-p}}$. Med $p = 4$ får vi $|x| < 0.0839$ och med $p = 6$ krävs $|x| < 0.0266$.

1.2 a) Den räta linjen blir $y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) = 1 + \frac{1-\sqrt{1-h}}{h}(x-1)$, så avvikelsen $r(x) = \sqrt{x} - 1 - \frac{1-\sqrt{1-h}}{h}(x-1)$.
Eftersom $r(1-h) = r(1) = 0$ så måste den maximala avvikelsen inträffa i det inre av intervallet. Vi deriverar $r(x)$ och söker derivatans nollställe $x = \alpha$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1-\sqrt{1-h}}{h} = 0 \implies \sqrt{\alpha} = \frac{h}{2(1-\sqrt{1-h})} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1-h}+1),$$
$$\alpha = \tfrac{1}{4}(1 - h + 2\sqrt{1-h} + 1) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1-h} + 1 - \tfrac{h}{2}),$$

$r(\alpha) = \sqrt{\alpha} - 1 + \frac{1}{h}(\sqrt{1-h}-1)(\alpha-1) = \frac{1}{2}(\sqrt{1-h}-1) + \frac{1}{h}(\sqrt{1-h}-1)\,\frac{1}{2}(\sqrt{1-h}-1-\frac{h}{2}) =$
$\frac{1}{2}(\sqrt{1-h}-1)(1 + \frac{\sqrt{1-h}-1}{h} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{1-h}-1)(\frac{\sqrt{1-h}-1}{h} + \frac{1}{2})$.

h	α	$r(\alpha)$
0.1	0.94934	$3.3784 \cdot 10^{-4}$
0.01	0.99499	$3.1486 \cdot 10^{-6}$
0.001	0.99950	$3.1273 \cdot 10^{-8}$
0.0001	0.99995	$3.1252 \cdot 10^{-10}$
0.00001	0.99999	$3.1250 \cdot 10^{-12}$

Som synes avtar avvikelsen som ch^2 där $c \approx 0.03125$.

b) Med lite matematisk analys kan den experimentella iakttagelsen bevisas.
Serieutveckla: $(1-h)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \ldots$ och sätt in i uttrycket för $r(\alpha)$. Det ger $r(\alpha) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \ldots)(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8}h + \ldots + \frac{1}{2}) = \frac{1}{32}h^2 +$ termer av högre ordning.
Koefficienten $\frac{1}{32} = 0.03125$ (vilket också experimentet visar).

1.3 a) Vänsterledet är: $\mathrm{VL} = \frac{1}{h}[y(a+h) - y(a)] - y'(a) =$
$= \frac{1}{h}\left[y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2}y''(a) + \frac{h^3}{3!}y'''(a) + \ldots - y(a)\right] - y'(a) = \frac{y''(a)}{2}h + O(h^2)$.
Svar: $p = 1$, felet är proportionellt mot steglängden (konstanten $c = \frac{y''(a)}{2}$).

b) Vänsterledet är: $\mathrm{VL} = \frac{1}{2h}[-y(a+2h) + 4y(a+h) - 3y(a)] - y'(a) =$

$= \frac{1}{2h}\left\{-\left[y(a) + 2hy'(a) + \frac{4h^2}{2}y''(a) + \frac{8h^3}{6}y'''(a) + \ldots\right] + \right.$
$\left. +4\left[y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2}y''(a) + \frac{h^3}{6}y'''(a) + \ldots\right] - 3y(a)\right\} - y'(a) =$
$= -\frac{y'''(a)}{3}h^2 + O(h^3)$.
Svar: $p = 2$, vilket innebär att felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat (konstanten $c = -\frac{y'''(a)}{3}$).

c)

```
x=7:0.02:8;
y=(sqrt(x-7).^5+2*sin(pi*sqrt(x)))./(sqrt(x+4*log(x-2*pi))-1); plot(x,y)
disp('     h          D1          D2       D1-yprim  D2-yprim ')
h=0.04;  yprim=-1.68043;
for k=1:4
  x=7+h*(0:2)';
  y=(sqrt(x-7).^5+2*sin(pi*sqrt(x)))./(sqrt(x+4*log(x-2*pi))-1);
  D1=(y(2)-y(1))/h;  D2=(-y(3)+4*y(2)-3*y(1))/(2*h);
  disp([h D1 D2 D1-yprim D2-yprim])
  h=h/2;
end
```

h	D1	D2	D1-yprim	D2-yprim
0.040	-1.5784	-1.6707	0.1021	0.0097
0.020	-1.6282	-1.6781	0.0522	0.0023
0.010	-1.6541	-1.6800	0.0263	0.0005
0.005	-1.6672	-1.6804	0.0132	0.0001

Tabellen visar att då h halveras så halveras i stort sett felet i `D1`. Felet i `D2` blir cirka fjärdedelen av sitt förra värde då h halveras (felet prop. mot h^2).

2 Ekvationer

2.1 Nollställena till $f(x)$ är samma som täljarens nollställen, dvs $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ (under förutsättning att nämnaren $x^2 - x - 1 \neq 0$ för dessa nollställen).
Skissa kurvan $y = x^3 + 3x^2 - 3$ på $[-3, 1]$. Nollställena avläses till $\alpha_1 \approx -2.5$, $\alpha_2 \approx -1.5$, $\alpha_3 \approx 1$. Med Newton-Raphsons metod erhålls större noggrannhet:

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^3 + 3x_n^2 - 3)/(3x_n^2 + 6x_n); \quad \begin{array}{lll} x_0 = -2.5 & \text{konvergerar mot} & -2.532 \\ x_0 = -1.5 & \text{konvergerar mot} & -1.347 \\ x_0 = 1 & \text{konvergerar mot} & 0.879 \end{array}$$

2.2 Skissa kurvorna $y = e^x$ och $y = 10\cos x$. Då ser man att de skär varandra ungefär vid $x = 1.2$ och dessutom vid $x \approx -\pi/2 - n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Vi använder Newton-Raphsons metod: $x_{k+1} = x_k + h_k$ där $h_k = -(e^{x_k} - 10\cos x_k)/(e^{x_k} + 10\sin x_k)$.
Med $x_0 = 1.2$ erhålls (endast nio siffror i x_k skrivs ut): $h_0 = 0.02400700$,
$x_1 = 1.22400700$, $h_1 = -1.55177 \cdot 10^{-4}$, $x_2 = 1.22385182$, $h_2 = -6.4 \cdot 10^{-9}$,
$x_3 = 1.22385181$, $h_3 = -1.4 \cdot 10^{-16}$, $x_4 = 1.22385181$.

5 Interpolation

5.1 Givet är en tabell över ångtrycket P mm Hg vid olika temperaturer T°C.

T	-15	-10	-5	0
P	1.24	1.95	3.01	4.58

Bestäm ett approximativt värde på ångtrycket vid -8°C med linjär interpolation.

Använd kvadratisk interpolation för att noggrannare bestämma $P(-8)$. Gör det dels genom att utnyttja T-värdena -10, -5, 0, dels genom att utnyttja T-värdena -10, -5, -15.

5.2 a) Bestäm den parabel som passerar genom punkterna $(1.6,\ 4.4)$, $(2.4,\ y_2)$ och $(3.2,\ 2.0)$ dels för fallet $y_2 = 0.4$, dels för $y_2 = 5.2$. Beräkna polynomets derivata vid $x = 2.4$ i båda fallen.

b) Visa att vid interpolation med ett andragradspolynom så är polynomets derivata i intervallets mittpunkt oberoende av y-värdet där.

5.3 Bestäm med Newtons ansats polynomet $P(x)$ som går genom de fyra punkterna $(1,\ 3)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 0)$, $(5,\ 11)$. Beräkna också värdet $P(7)$.

Bestäm interpolationspolynomet $Q(x)$ som passerar genom ovanstående punkter samt genom punkten $(7,\ 6)$. Hur mycket påverkas koefficienten för högstagradstermen i $Q(x)$ om y-värdet vid $x = 7$ ändras en enhet?

Skriv ett MATLAB-program som ritar upp polynomkurvan för $Q(x)$. För datorbruk är det enklare att använda den naiva ansatsen.

5.4 I vetenskapsakademins almanacka finns en tabell över dagens längd vid olika tider av året på några orter. För den 21 juni visar tabellen följande värden:

Ort	Polhöjd	Dagens längd
Lund	55.7°	17 tim 28 min
Göteborg	57.7°	18 tim 00 min
Stockholm	59.3°	18 tim 31 min
Härnösand	62.6°	19 tim 56 min
Luleå	65.6°	22 tim 34 min

Beräkna dagens längd den 21 juni i Hudiksvall, som ligger på 61.7°.

5 Interpolation

5.1 Linjär interpolation med $T_1 = -10$, $T_2 = -5$: $y(T) = 1.95 + \frac{3.01-1.95}{-5+10}(T+10) = 1.95 + 0.212(T+10)$; $P(-8) \approx y(-8) = 1.95 + 0.212 \cdot 2 = 2.374 \approx 2.37$.
Kvadratisk interpolation med $T_1 = -10$, $T_2 = -5$, $T_3 = 0$ och Newtons ansats $P(T) = c_1 + c_2(T+10) + c_3(T+10)(T+5)$ ger sambanden

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 1.95 \\ c_1 + 5c_2 &= 3.01 \\ c_1 + 10c_2 + 50c_3 &= 4.58 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= 1.95 \\ c_2 &= 0.212 \\ c_3 &= 0.51/50 = 0.0102 \end{aligned}\right.$$

$P(-8) = 1.95 + 0.212 \cdot 2 + 0.0102 \cdot 2 \cdot (-3) = 2.374 - 0.061 = 2.313 \approx 2.31$.
Kvadratisk interpolation med $T_1 = -10$, $T_2 = -5$, $T_3 = -15$ och Newtons ansats $P(T) = c_1 + c_2(T+10) + c_3(T+10)(T+5)$ ger samma c_1 och c_2 men nytt c_3, för insättning av $T_3 = -15$ ger $1.95 + 0.212(-5) + c_3(-5)(-10) = 1.24 \Rightarrow c_3 = 0.35/50 = 0.0070$. $P(-8) = 1.95 + 0.212 \cdot 2 + 0.0070 \cdot 2 \cdot (-3) = 2.374 - 0.42 = 2.332 \approx 2.33$. Resultaten vid kvadratisk interpolation skiljer sig 0.02 från varandra så lämpligt svar är: Ångtrycket vid -8^oC är 2.32 ± 0.02.

5.2 a) Med Newtons ansats $P(x) = c_1 + c_2(x-1.6) + c_3(x-1.6)(x-2.4)$, är derivatan $P'(x) = c_2 + c_3(x-2.4+x-1.6)$. Sambanden $P(1.6) = 4.4$, $P(2.4) = 0.4$, $P(3.2) = 2.0$ leder till $c_1 = 4.4$, $c_2 = -5$, $c_3 = 35/8$, polynomet blir $P_I(x) = 4.4 - 5(x-1.6) + 35/8(x-1.6)(x-2.4)$, och dess derivata vid $x = 2.4$: $P_I'(2.4) = -5 + 35/8 \cdot 0.8 = -1.5$. Med $P(2.4) = 5.2$ blir koefficienterna $c_1 = 4.4$, $c_2 = 1$, $c_3 = -25/8$, alltså $P_{II}(x) = 4.4 + x - 1.6 - 25/8(x-1.6)(x-2.4)$. Derivatan vid $x = 2.4$: $P_{II}'(2.4) = 1 - 25/8 \cdot 0.8 = -1.5$, dvs samma som ovan.

b) Låt punkterna vara (x_1, y_1), (x_1+h, y_2), (x_1+2h, y_3) : $P(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_1-h)$. De tre interpolationssambanden ger $c_1 = y_1$, $c_2 = (y_2 - y_1)/h$, $2h^2c_3 = y_3 - y_1 - 2(y_2 - y_1)$, dvs $c_3 = \frac{1}{2h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1)$.
Derivatan $P'(x) = c_2 + c_3(x - x_1 - h + x - x_1) \Rightarrow P'(x_1+h) = c_2 + c_3h = \frac{1}{h}(y_2 - y_1) + \frac{1}{2h}(y_3 - 2y_2 + y_1) = \frac{1}{2h}(y_3 - y_1)$. Derivatan i intervallets mittpunkt är alltså oberoende av y-värdet där och är lika med centraldifferenskvoten $\frac{1}{2h}(y_3 - y_1) = \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$, vilket är lutningen för den räta linjen genom (x_1, y_1) och (x_3, y_3).

5.3 $P(x) = c_1 + c_2(x-1) + c_3(x-1)(x-3) + c_4(x-1)(x-3)(x-4)$. Interpolationssambanden leder till ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 3 \\ c_1 + 2c_2 &= 3 \\ c_1 + 3c_2 + 3 \cdot 1c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_2 + 4 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 2 \cdot 1c_4 &= 11 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 3 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= -1 \\ c_4 &= 2 \end{aligned}.$$

$P(x) = 3 - (x-1)(x-3) + 2(x-1)(x-3)(x-4)$; $P(7) = 123$.
Ansätt $Q(x) = P(x) + c_5(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)$, för då gäller $Q(x_i) = P(x_i)$ för $x_i = 1, 3, 4, 5$. $Q(7) = P(7) + c_5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$; $c_5 = (6 - 123)/144 = -\frac{117}{144}$.
$Q(x) = 3 - (x-1)(x-3) + 2(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{117}{144}(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)$.

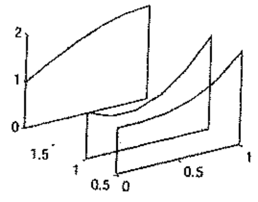
5.5 Vi önskar approximera en funktion som ser ut ungefär som en parabelbåge med ett andragradspolynom. Vi söker funktionens extremvärde.

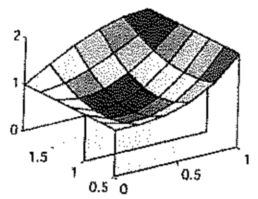
a) Använd formeln för kvadratisk interpolation för att härleda extrempunktens x-koordinat.

b) I en almanacka finner man följande uppgifter om dagens längd i Tärnaby i Lappland. Beräkna hur lång årets längsta dag är i Tärnaby. Vilken dag är det?

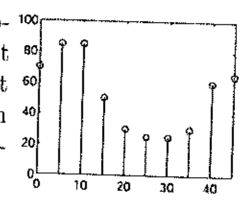
Datum	Dagens längd
1 juni	20 tim 56 min
16 juni	22 tim 24 min
1 juli	22 tim 01 min

5.6 En rymdyta ska spännas som tak över rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $0.5 \leq y \leq 2$ och gå genom tre givna kurvor i parallella plan, vid $y = 0.5$, $y = 1$ och $y = 2$. Kurvorna är $z(x, 0.5) = 1 + x^3$, $z(x, 1) = 1 - 1.5x + 2.5x^2$ och $z(x, 2) = 1 + \sin(\pi x/2)$, se vänstra figuren. Använd kvadratisk interpolation för att konstruera rymdytan. Interpolera tvärs över (dvs vid fixt x) vid x-värdena $x = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$. Resultatet med steget 0.25 i y-led visas i högra bilden. Gör om räkningarna med finare indelning i både x- och y-led (t ex $dx = 0.1$ och $dy = 0.125$) och rita upp rymdytan.





5.7 Under en lektion varierar den typiska teknologens uppmärksamhet enligt följande mätningar var femte minut från tiden noll till fyrtiofem minuter (vakenheten mätt i procent): 70, 85, 85, 50, 30, 25, 25, 30, 60, 65. Man tror att en modell med ett fjärdegradspolynom ska kunna ge god kurvanpassning.



a) Utnyttja de fem värdena vid tiderna 0, 10, 20, 30, 40 minuter och interpolera genom dem. Rita fjärdegradskurvan tillsammans med de tio givna mätvärdena. Jämför det erhållna värdet vid $t = 5$ med det uppmätta vakenvärdet fem minuter efter lektionsstart. Modellen får väl betraktas som ganska dålig, eller hur.

b) Pröva istället värdena vid tiderna 5, 15, 25, 35, 45 minuter och interpolera. Prickmarkera kurvan i samma figur. Jämför värdet vid $t = 0$ med det uppmätta.

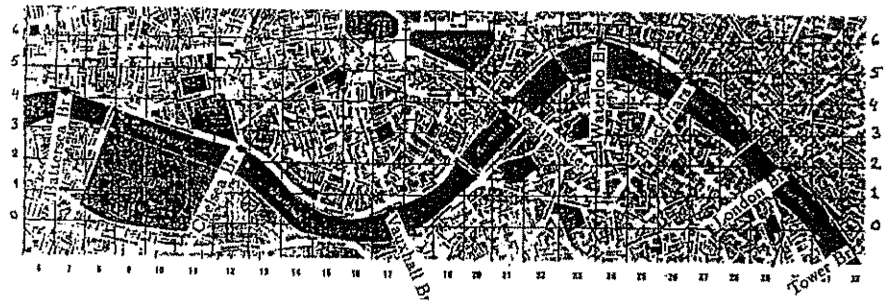
c) Med minstakvadratmetoden kan en fjärdegradskurva beräknas som inte interpolerar men anpassar sig så bra som möjligt till alla tio punkterna. Beräkna och rita in denna lösningskurva och skriv ut residualvektorn.

d) Överge modellen med fjärdegradspolynom och utnyttja styckvis interpolation med naturliga kubiska splines genom de tio punkterna. Rita splinekurvan tillsammans med mätpunkterna. Pröva till sist MATLAB-splines.

5.8 Använd hermiteinterpolation i två intervall för approximation av felfunktionen erf(x) som definieras av integraluttrycket $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Utnyttja funktionsvärden och derivatavärden av erf(x) för x-värdena 0, 1, 2 (erf(1) = 0.8427, erf(2) =0.9953).
Beräkna det hermiteinterpolerade värdet vid $x = 0.6$ och $x = 1.4$ och jämför med erf(0.6)=0.6039 och erf(1.4)=0.9523.

5.9 London Royal Rowing Club (LRRC) har gett KTH i uppdrag att göra en matematisk beskrivning av Themsens norra strand genom London. Givet är koordinaterna för norra brofästet på åtta broar (se kartan). Themsen har ingen diskontinuitet i flodriktningen fram till Waterloo, framhålls från LRRC. Mellan Battersea och Chelsea Bridge är rät linje tillräckligt god approximation.

Battersea Br	7.4	4.2
Chelsea Br	12.8	2.4
Vauxhall Br	17.6	0.6
Westminster	21.5	4.0
Waterloo Br	24.0	6.0
Blackfriars	27.1	4.7
London Br	30.2	1.8
Tower Bridge	32.5	-0.6



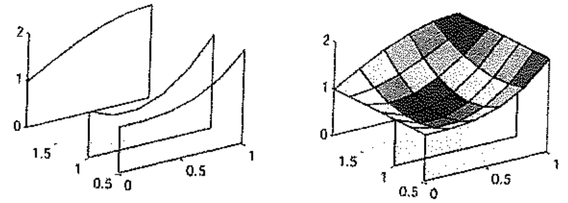
5.5 Vi önskar approximera en funktion som ser ut ungefär som en parabelbåge med ett andragradspolynom. Vi söker funktionens extremvärde.

a) Använd formeln för kvadratisk interpolation för att härleda extrempunktens x-koordinat.

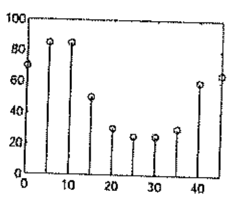
b) I en almanacka finner man följande uppgifter om dagens längd i Tärnaby i Lappland. Beräkna hur lång årets längsta dag är i Tärnaby. Vilken dag är det?

Datum	Dagens längd
1 juni	20 tim 56 min
16 juni	22 tim 24 min
1 juli	22 tim 01 min

5.6 En rymdyta ska spännas som tak över rektangeln $0 \leq x \leq 1,\ 0.5 \leq y \leq 2$ och gå genom tre givna kurvor i parallella plan, vid $y = 0.5$, $y = 1$ och $y = 2$. Kurvorna är $z(x, 0.5) = 1 + x^3$, $z(x, 1) = 1 - 1.5x + 2.5x^2$ och $z(x, 2) = 1 + \sin(\pi x/2)$, se vänstra figuren. Använd kvadratisk interpolation för att konstruera rymdytan. Interpolera tvärs över (dvs vid fixt x) vid x-värdena $x = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$. Resultatet med steget 0.25 i y-led visas i högra bilden. Gör om räkningarna med finare indelning i både x- och y-led (t ex $dx = 0.1$ och $dy = 0.125$) och rita upp rymdytan.



5.7 Under en lektion varierar den typiska teknologens uppmärksamhet enligt följande mätningar var femte minut från tiden noll till fyrtiofem minuter (vakenheten mätt i procent): 70, 85, 85, 50, 30, 25, 25, 30, 60, 65. Man tror att en modell med ett fjärdegradspolynom ska kunna ge god kurvanpassning.



a) Utnyttja de fem värdena vid tiderna 0, 10, 20, 30, 40 minuter och interpolera genom dem. Rita fjärdegradskurvan tillsammans med de tio givna mätvärdena. Jämför det erhållna värdet vid $t = 5$ med det uppmätta vakenvärdet fem minuter efter lektionsstart. Modellen får väl betraktas som ganska dålig, eller hur.

b) Pröva istället värdena vid tiderna 5, 15, 25, 35, 45 minuter och interpolera. Prickmarkera kurvan i samma figur. Jämför värdet vid $t = 0$ med det uppmätta.

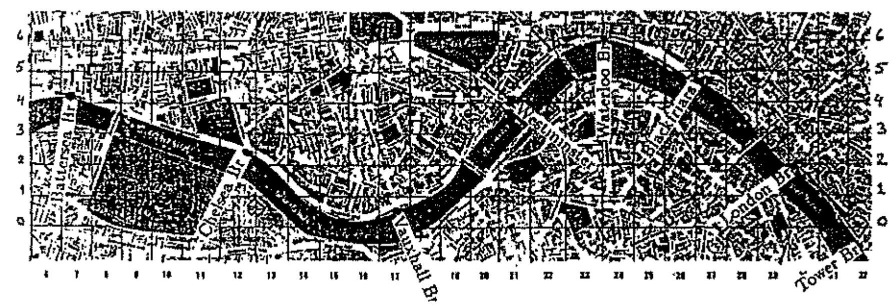
c) Med minstakvadratmetoden kan en fjärdegradskurva beräknas som inte interpolerar men anpassar sig så bra som möjligt till alla tio punkterna. Beräkna och rita in denna lösningskurva och skriv ut residualvektorn.

d) Överge modellen med fjärdegradspolynom och utnyttja styckvis interpolation med naturliga kubiska splines genom de tio punkterna. Rita splinekurvan tillsammans med mätpunkterna. Pröva till sist MATLAB-splines.

5.8 Använd hermiteinterpolation i två intervall för approximation av felfunktionen $\mathrm{erf}(x)$ som definieras av integraluttrycket $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Utnyttja funktionsvärden och derivatavärden av $\mathrm{erf}(x)$ för x-värdena 0, 1, 2 ($\mathrm{erf}(1) = 0.8427$, $\mathrm{erf}(2) = 0.9953$).
Beräkna det hermiteinterpolerade värdet vid $x = 0.6$ och $x = 1.4$ och jämför med $\mathrm{erf}(0.6) = 0.6039$ och $\mathrm{erf}(1.4) = 0.9523$.

5.9 London Royal Rowing Club (LRRC) har gett KTH i uppdrag att göra en matematisk beskrivning av Themsens norra strand genom London. Givet är koordinaterna för norra brofästet på åtta broar (se kartan). Themsen har ingen diskontinuitet i flodriktningen fram till Waterloo, framhålls från LRRC. Mellan Battersea och Chelsea Bridge är rät linje tillräckligt god approximation.

Battersea Br	7.4	4.2
Chelsea Br	12.8	2.4
Vauxhall Br	17.6	0.6
Westminster	21.5	4.0
Waterloo Br	24.0	6.0
Blackfriars	27.1	4.7
London Br	30.2	1.8
Tower Bridge	32.5	-0.6



```
y=[0.5 1 2]'; dx=0.2; dy=0.25;
for j=1:2
  x=0:dx:1;  z1=1+x.^3; z2=1-1.5*x+2.5*x.^2; z3=1+sin(pi/2*x);
  subplot(2,2,j); fill3([0 0 1 1],[0.5 2 2 0.5],[0 0 0 0],'c')  % golvet
  hold on, axis([0 1 0.5 2 0 2])
  for k=1:3, plot3([0 0 1 1],y(k)*[1 1 1 1],[1 0 0 2]), end      % stolpar
  zmat=[z1; z2; z3];
  A=[ones(3,1) y y.^2]; C=A\zmat                % kvadr.interpol. vid fixt x
  yy=(0.5:dy:2)'; Z=[ones(size(yy)) yy yy.^2]*C;
  X=ones(size(yy))*x;  Y=yy*ones(size(x)); surf(X,Y,Z)          % rymdytan
  dx=dx/2;  dy=dy/2;                     % ny beräkning  med finare indelning
end
```

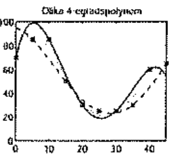
5.7 Naiva ansatsen används för fjärdegradspolynomen i uppgifterna a, b och c.

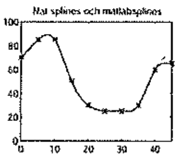
```
  u=[70 85 85 50 30 25 25 30 60 65]';
  m=(0:45)';  M=[ones(46,1) m m.^2 m.^3 m.^4];
% a) Interpolera genom varannan punkt: (0, 10, ...) minuter
  x=(0:10:40)'; y=u(1:2:9);  A=[ones(5,1) x  x.^2  x.^3  x.^4];  ca=A\y
  Pa=M*ca;  P5minut=Pa(6), P5diff=u(2)-P5minut

% b) Interpolera genom varannan punkt: (5, 15, ...) minuter
  x=(5:10:45)'; y=u(2:2:10); A=[ones(5,1) x  x.^2  x.^3  x.^4]; cb=A\y
  Pb=M*cb;  P0minut=Pb(1), P0diff=u(1)-P0minut

% c) Minstakvadratmetoden
  x=(0:5:45)'; A=[ones(10,1) x x.^2 x.^3 x.^4]; cc=A\u
  Pc=M*cc;  residual=u-A*cc
  subplot(2,2,1), plot(x,u,'*', m,Pa, m,Pb,'--', m,Pc,':')
  axis([0 45 0 100]), title('Olika 4:egradspolynom')

% d) Naturliga kubiska splines (ekvidistanta fallet)
  h=5;  du=diff(u);
  dia=[2; 4*ones(8,1); 2];  p=ones(9,1);
  b=3/h*[du(1); du(1:8)+du(2:9); du(9)]; k=tridia(dia,p,p,b);
  g=h*k(1:9)-du;  c=2*du-h*(k(1:9)+k(2:10));
  dt=0.2;  t=(dt:dt:1)';  Ps=u(1);
  for i=1:9
    s=u(i)+t*du(i)+t.*(1-t)*g(i)+t.^2.*(1-t)*c(i);  Ps=[Ps; s];
  end
  subplot(2,2,2), plot(x,u,'*', m,Ps), axis([0 45 0 100]); hold on
  title('Nat.splines och matlabsplines')
  yspl=spline(x,u,m);  plot(m,yspl,'--')                 % matlabsplines
```

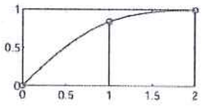




a) P5minut= 98.8, P5diff = −13.8.
b) P0minut= 94.5, P0diff= −24.5.
c) Residualer från −6.8 till 7.1.

5.8 Hermiteinterpolera, intervall $0 \le x \le 1$ och $1 \le x \le 2$, med $h_1 = h_2 = h = 1$. $y_1 = \mathrm{erf}(0) = 0$, $y_2 = \mathrm{erf}(1) = 0.8427$, $y_3 = \mathrm{erf}(2) = 0.9953$.
Derivatan $y(x) = 2e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$; $k_1 = 2/\sqrt{\pi} = 1.1284$, $k_2 = 2e^{-1}/\sqrt{\pi} = 0.4151$, $k_3 = 2e^{-4}/\sqrt{\pi} = 0.0207$. Vi behöver $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0.8427$, $\Delta y_2 = 0.1526$, $g_1 = hk_1 - \Delta y_1 = 0.2857$, $g_2 = hk_2 - \Delta y_2 = 0.2625$, $c_1 = 2\Delta y_1 - h(k_1+k_2) = 0.1419$, $c_2 = 2\Delta y_2 - h(k_2 + k_3) = -0.1306$.

Sätt in i Hermites interpolationsformel med den lokala variabeln t $(0 \le t \le 1)$.
$(0 \le x \le 1): \; P(x) = P(0+1\cdot t) = s_1(t) = 0.8427t + 0.2857t(1-t) + 0.1419t^2(1-t)$.
$(1 \le x \le 2): \; P(1+1\cdot t) = s_2(t) = 0.8427 + 0.1526t + 0.2625t(1-t) - 0.1306t^2(1-t)$.



Polynomvärdet för $x = 0.6$ erhålls som $s_1(0.6) = 0.5946$; avvikelse från erf(0.6) är 0.0093. Polynomvärdet för $x = 1.4$ erhålls som $s_2(0.4) = 0.9542$; avvikelse från erf(1.4) är -0.0019.

5.9 Battersea–Chelsea:

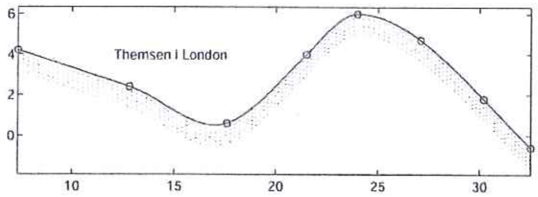
$$0 \le t \le 1, \quad \left.\begin{array}{l} x(t) = 7.4 + 5.4\,t \\ y(t) = 4.2 - 1.8\,t \end{array}\right\} \quad \text{Linjens lutning } k_1 = \frac{-1.8}{5.4} = -\frac{1}{3}.$$

Chelsea–Vauxhall–Westminster–Waterloo: Här gör vi en tabell för att underlätta insättningen i Hermites formel: $y(x_i + t\cdot h_i) = y_i + t\,\Delta y_i + t(1-t)g_i + t^2(1-t)c_i$, där $g_i = h_i k_i - \Delta y_i$ och $c_i = 2\Delta y_i - h_i(k_i + k_{i+1})$.

x	y	h	Δy	k	g	c
12.8	2.4	4.8	−1.8	−1/3	0.2	−3.6
17.6	0.6	3.9	3.4	1/3	−2.1	1.6
21.5	4.0	2.5	2.0	1	0.5	1.5
24.0	6.0			0		

Chelsea–Vauxhall:	$x(t) = 12.8 + 4.8t$; $y(t) = 2.4 - 1.8t + 0.2t(1-t) - 3.6t^2(1-t)$
Vauxhall–Westminster:	$x(t) = 17.6 + 3.9t$; $y(t) = 0.6 + 3.4t - 2.1t(1-t) + 1.6t^2(1-t)$
Westminster–Waterloo:	$x(t) = 21.5 + 2.5t$; $y(t) = 4.0 + 2.0t + 0.5t(1-t) + 1.5t^2(1-t)$

Waterloo–Tower Bridge: För handräkning använder vi Newtons ansats $P(x) = c_1 + c_2(x-24) + c_3(x-24)(x-27.1) + c_4(x-24)(x-27.1)(x-30.2)$ vars koefficienter är lättberäknade och blir $c_1 = 6$, $c_2 = -0.41935$, $c_3 = -0.083247$, $c_4 = 0.007441$. Derivatan: $P'(x) = c_2 + c_3(x-27.1+x-24) + c_4((x-27.1)(x-30.2) + (x-24)(x-30.2) + (x-24)(x-27.1))$. Lutningen vid Waterloo blir: $P'(24) = c_2 - 3.1c_3 + (-3.1)(-6.2)c_4 = -0.0183$, god approximation till noll-lutning (östlig riktning).



5.10 Ryggen byggs upp av två tredjegradspolynom. Eftersom lutningarna i punkterna är kända används hermiteinterpolation. För avsnittet från A till B gäller $h = 3$,