2 Ekvationer

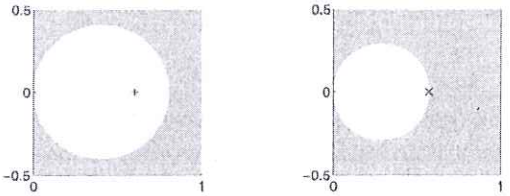
2.1 Bestäm nollställena till funktionen $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 3)/(x^2 - x - 1)$ med tre decimalers noggrannhet.

2.2 Grovlokalisera rötterna till ekvationen $e^x = 10 \cos x$. Beräkna den positiva roten med åtta siffrors precision.

2.3 Ekvationen $a^x = x^a$ har en trivial rot $x = a$ och en annan rot. För $a = 2$ blir den $x = 4$. Bestäm den icketriviala roten för $a = 3$. Använd Newton-Raphsons metod efter lämplig omskrivning.

Om a inte är exakt tre utan snarare 3.00 ± 0.005, hur stor är osäkerheten i x-värdet? För vilket a-värde finns bara roten $x = a$?

2.4 I en kvadratisk skiva med sidan en längdenhet borras ett cirkulärt hål med radien r så att periferin nuddar den vänstra kanten i origo enligt figuren. Tyngdpunktens x-koordinat ges av $x_{tp} = 0.5 + \pi r^2(0.5 - r)/(1 - \pi r^2)$.



a) Visa att maximalt värde på x_{tp} erhålls för det r-värde som satisfierar ekvationen $\pi r^3 - 3r + 1 = 0$. Bestäm r och tyngdpunktskoordinaten x_{tp}.

b) Beräkna hur stor cirkelhålradien ska vara för att tyngdpunkten ska hamna vid högra hålkanten.

2.5 Insättningssortering och quicksort är två vanliga metoder att ordna en vektor med N komponenter. Insättning har komplexitet $\sim N^2$ och quicksort $\sim N \ln N$ om startordningen är slumpmässig. Donald Knuth undersökte (år 1973) körtider för insättning och quicksort ('medianen av tre'-versionen) och fann följande beroende för insättning: $2N^2 + 9N$ tidsenheter, och för quicksort: $14.5\, N \ln N + 1.9N$. För vilka N var insättning snabbast på Donald Knuths sjuttiotalsdator?

$$= \frac{1}{2h}\left\{-\left[y(a)+2hy'(a)+\frac{4h^2}{2}y''(a)+\frac{8h^3}{6}y'''(a)+\ldots\right]+\right.$$
$$\left.+4\left[y(a)+hy'(a)+\frac{h^2}{2}y''(a)+\frac{h^3}{6}y'''(a)+\ldots\right]-3y(a)\right\}-y'(a)=$$
$$= -\frac{y'''(a)}{3}h^2+O(h^3).$$

Svar: $p=2$, vilket innebär att felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat (konstanten $c=-\frac{y'''(a)}{3}$).

c)

```
x=7:0.02:8;
y=(sqrt(x-7).^5+2*sin(pi*sqrt(x)))./(sqrt(x+4*log(x-2*pi))-1); plot(x,y)
disp('      h          D1          D2      D1-yprim  D2-yprim ')
h=0.04;  yprim=-1.68043;
for k=1:4
  x=7+h*(0:2)';
  y=(sqrt(x-7).^5+2*sin(pi*sqrt(x)))./(sqrt(x+4*log(x-2*pi))-1);
  D1=(y(2)-y(1))/h;  D2=(-y(3)+4*y(2)-3*y(1))/(2*h);
  disp([h D1 D2 D1-yprim D2-yprim])
  h=h/2;
end
```

h	D1	D2	D1-yprim	D2-yprim
0.040	-1.5784	-1.6707	0.1021	0.0097
0.020	-1.6282	-1.6781	0.0522	0.0023
0.010	-1.6541	-1.6800	0.0263	0.0005
0.005	-1.6672	-1.6804	0.0132	0.0001

Tabellen visar att då h halveras så halveras i stort sett felet i D1. Felet i D2 blir cirka fjärdedelen av sitt förra värde då h halveras (felet prop. mot h^2).

2 Ekvationer

2.1 Nollställena till $f(x)$ är samma som täljarens nollställen, dvs $x^3+3x^2-3=0$ (under förutsättning att nämnaren $x^2-x-1\neq 0$ för dessa nollställen).

Skissa kurvan $y=x^3+3x^2-3$ på $[-3,\ 1]$. Nollställena avläses till $\alpha_1\approx-2.5$, $\alpha_2\approx-1.5$, $\alpha_3\approx 1$. Med Newton-Raphsons metod erhålls större noggrannhet:

	$x_0=-2.5$ konvergerar mot	-2.532
$x_{n+1}=x_n-(x_n^3+3x_n^2-3)/(3x_n^2+6x_n)$;	$x_0=-1.5$ konvergerar mot	-1.347
	$x_0=1$ konvergerar mot	0.879

2.2 Skissa kurvorna $y=e^x$ och $y=10\cos x$. Då ser man att de skär varandra ungefär vid $x=1.2$ och dessutom vid $x\approx-\pi/2-n\pi$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Vi använder Newton-Raphsons metod: $x_{k+1}=x_k+h_k$ där $h_k=-(e^{x_k}-10\cos x_k)/(e^{x_k}+10\sin x_k)$. Med $x_0=1.2$ erhålls (endast nio siffror i x_k skrivs ut): $h_0=0.02400700$, $x_1=1.22400700$, $h_1=-1.55177\cdot10^{-4}$, $x_2=1.22385182$, $h_2=-6.4\cdot10^{-9}$, $x_3=1.22385181$, $h_3=-1.4\cdot10^{-16}$, $x_4=1.22385181$.

Som synes avtar korrektionstermerna h_k kvadratiskt (ner till datorprecision). Den positiva roten är med åtta korrekta siffror: 1.2238518.

2.3 Logaritmera: $x \ln a = a \ln x$, eller $\ln x - x\frac{\ln a}{a} = 0$. Inför $c = \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln 3}{3} = 0.366204096$. Lös ekvationen $\ln x - cx = 0$ med Newton-Raphsons metod. Grovskiss av kurvan $y = \ln x - cx$ visar att förutom roten vid $x = 3$ finns det en rot nära $x = 2.5$. Efter några iterationer erhålls roten till 2.4780527.

Parametern a har en osäkerhet på ± 0.005, hur påverkar det rotvärdet? Gör om räkningarna med störda a-värden. Med $a = 3.005$ gäller $c = 0.3661489$ och roten blir 2.4744. Med $a = 2.995$ gäller $c = 0.3662585$, roten blir 2.4817. Resultat: $x = 2.478 \pm 0.004$.
Kurvan $y = \frac{\ln x}{x}$ skär linjen $y = c$ i två punkter, men för $a = e$ sammanfaller de i maxpunkten $x = e$, $y = 1/e$.

2.4 a) Derivera uttrycket för x_{tp} och sätt derivatan lika med noll. Med MATLAB-satserna `c=[pi 0 -3 1]; r=roots(c)` får man: `r = -1.1139 0.7132 0.4007`, varav endast det sista värdet är rimligt för cirkelradien (och ger maximum). Tyngdpunktskoordinaten blir $x_{tp} = 0.6011$.

b) Ekvationen blir $0.5 + \pi r^2(0.5 - r)/(1 - \pi r^2) = 2r$ som kan omformas till $(0.5 - 2r)(1 - \pi r^2) + \pi r^2(0.5 - r) = 0$ dvs $\pi r^3 - 2r + 0.5 = 0$. MATLAB-satserna `c=[pi 0 -2 0.5]; r=roots(c)` ger `r = -0.9017 0.6145 0.2872`, där roten 0.2872 är den enda rimliga. Tyngdpunktskoordinat: $x_{tp} = 2R = 0.5744$.

2.5 Ekvationen blir $2N^2 + 9N - 14.5N \ln N - 1.9N = 0$. En enkel skiss visar att N-värdet finns mellan 15 och 20. Med till exempel Newton-Raphsons metod erhålls $N = 16.984$. Insättningssortering var alltså snabbare än quicksort för $N < 17$.

2.6 $x_0 = 1.5$, $P(1.5) = 0.25$ och $P'(1.5) = 50.75$. Ett steg med Newton-Raphsons metod görs: $x_1 = 1.5 - \frac{0.25}{50.75} = 1.5 - 0.00493 = 1.49507$.

```
x=1.5;  dx=1;
while abs(dx/x)>1e-12          % god marginal i noggrannhetskravet
  p=4*x^4-7*x^3+5.5*x^2+27.5*x-50;  pprim=16*x^3-21*x^2+11*x+27.5;
  dx=-p/pprim; disp([x dx]), x=x+dx;
end, xsolv=x
```

Efter tre iterationer fås $x = 1.4950604705$. Med `roots([4 -7 5.5 27.5 -50])` erhålls alla rötter med datorprecision (vi nöjer oss med att skriva ut fem siffror): $1.0238 \pm 1.9016i$, 1.4951, -1.7926.

2.7 Låt $f(x) = 10x^{1/10} - x - \cos x - e^{-x}$. För x nära noll gäller $f \approx 10x^{1/10} - x - 1 - 1 \approx 10(x^{1/10} - 0.2)$ som blir noll för $x = 0.2^{10} = 2^{10} \cdot 10^{-10} = 1.024 \cdot 10^{-7}$. Detta bör vara en god startgissning till ekvationen $f(x) = 0$. Med Newton-Raphsons metod (och en iteration) erhålls $x = 1.02400000 \cdot 10^{-7}$.

2.6 $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5.5x^2 + 27.5x - 50 = 0$ har en rot nära 1.5. Handräkna ett Newton-Raphson-steg för att få ett noggrannare rotvärde.
Skriv ett MATLAB-program som beräknar roten med tio korrekta siffror.
Utnyttja MATLABs `roots` för att erhålla alla fyra nollställena till $P(x)$.

2.7 Bestäm någon rot till ekvationen $10x^{\frac{1}{10}} - x - \cos x - e^{-x} = 0$. Undersök om det finns flera rötter; analysera vad som händer då $x \to 0$ och då $x \to \infty$.

2.8 På avståndet en meter från en vägg finns en två meter hög mur. En fem meter lång stege lutas över muren mot väggen så att stegen nuddar muren. På vilken höjd H stöder stegen mot väggen? Rita för hand en figur och härled ekvationen $H^2 + H^2/(H-2)^2 = 25$.

Skriv ekvationen som en polynomekvation $P(H) = 0$ och beräkna rötterna till den (t ex med MATLABs `roots`). Vilken eller vilka lösningar är rimliga?

2.9 Ekvationen $\tan x = x$ har oändligt många rötter. En rot finns vid $x = 0$. Bestäm de sex första positiva rötterna med minst sex siffrors noggrannhet. Det är lämpligt att först skriva om ekvationen genom förlängning med $\cos x$, förklara varför!

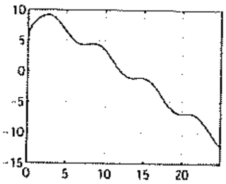
2.10 Ekvationen $ax - \sin x - \ln(1+x) = 0$ där $a = 1.96$ har förutom roten $x=0$ en liten positiv rot. Utnyttja serieutveckling för att hitta en approximation till roten med cirka en siffras noggrannhet. Beräkna därefter roten med minst fem säkra siffror.

Hur noggrant kan roten anges, om a-värdet ovan inte är givet exakt utan är korrekt avrundat?

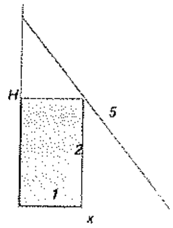
2.11 Ekvationen $e^{-ax^2}/\ln(x+b) = 1$ är given där parametrarna a och b uppfyller $a = 2.533 \pm 10^{-3}$ och $b = 0.543 \pm 2 \cdot 10^{-3}$. Bestäm roten till ekvationen med en noggrannhet som är rimlig med hänsyn till osäkerheten i a och b. Gör numeriska experiment för att avgöra hur många korrekta siffror som kan erhållas i rotvärdet.

2.12 Funktionen $g(x) = ae^{bx} + b$ antar värdena $g(-1) = 6$ och $g(0) = 12$. Bestäm a och b med minst fem korrekta decimaler.

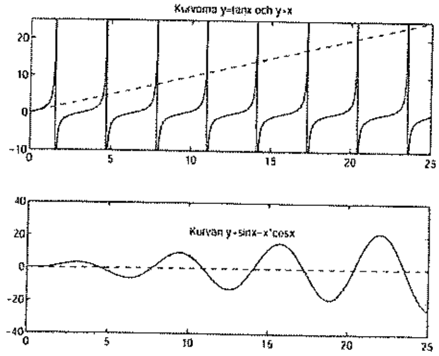
Finns det fler rötter? Rita upp funktionskurvan t ex i intervallet 0 till 25. Man ser att en rot finns vid $x \approx 12$. Med två iterationer i Newton-Raphsons metod erhålls roten med nio korrekta siffror, $x = 11.9840074$. Fler rötter kan inte finnas för $f(x)$ är inte definierad för $x < 0$, och för stora x-värden domineras funktionsuttrycket av termen $-x$ som går mot $-\infty$ (se figuren).



2.8 Likformighet ger $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{H}$, dvs $x = \frac{H}{H-2}$. Pythagoras sats ger $H^2 + x^2 = 5^2$, dvs $H^2 + H^2/(H-2)^2 = 25$. Förläng med $(H-2)^2$ så blir ekvationen $H^4 - 4H^3 - 20H^2 + 100H - 100 = 0$. Ekvationen löses i MATLAB med `c = [1 -4 -20 100 -100]; r = roots(c)`.
Rötterna är -4.9490, 4.6857, 2.6129, 1.6503. Eftersom H måste vara större än 2 så kommer stegen att luta mot väggen på höjden $H = 2.6129$ eller $H = 4.6857$.



2.9 Ekvationen lyder $\frac{\sin x}{\cos x} - x = 0$ med en nämnare som blir noll på oändligt många ställen (vid figurens vertikala streck där den MATLAB-ritade kurvan gör ett hopp från ∞ till $-\infty$). Förläng med $\cos x$ så att ekvationen i stället blir $\sin x - x\cos x = 0$. Med Newton-Raphsons metod erhålls rötterna 4.4934095, 7.7252518, 10.9041217, 14.0661939, 17.2207553, 20.3713030.




```
format long, xstart=3*pi/2-0.1;     % startgissning till rot nr 1
for nr=1:6
  disp(' '); disp('      x          dx')
  x=xstart;  dx=1;  iter=0;
  while abs(dx/x)>1e-12 & iter<8
    f=sin(x)-x*cos(x);  fprim=x*sin(x);
    dx=-f/fprim;  disp([x dx]), x=x+dx; iter=iter+1;
  end
  xstart=xstart+pi;           % startgissning till nästa rot
end
```

2.10 Serieutveckla: $1.96x-(x-x^3/6+\ldots)-(x-x^2/2+x^3/3-\ldots)=0$ som förenklas till $x\,(-0.04+x/2-x^2/6+\ldots)=0$. $x=0$ är trivial rot. Med två termer i utvecklingen erhålls $x\approx 0.08$. Med tre termer får vi andragradsekvationen $x^2-3x+0.24=0$ med rötterna $x=1.5\pm\sqrt{2.01}=1.5\pm 1.4177$. Den närmast noll är 0.0823. Med en siffras noggrannhet är roten 0.08.
Använd $x_0=0.08$ som startvärde i Newton-Raphsons metod på ursprungliga ekvationen (derivatan är $f'(x)=a-\cos x-\frac{1}{1+x}$). Efter ett par iterationer erhålls rotvärdet 0.0819825.

Undersök hur en störning i a påverkar roten. Lös ekvationen dels med $a=1.955$ som ger värdet 0.092484, dels med $a=1.965$ som ger 0.071533. Roten kan anges som 0.082 ± 0.011.

2.11 Skriv om ekvationen till $e^{-ax^2}-\ln(x+b)=0$ och lös med Newton-Raphsons metod. Uppritning av funktionskurvan visar att den enda roten finns ungefär vid $x=0.75$. Vi löser ekvationen tre gånger, dels med ostörda parametrar, dels med a störd, dels med b störd.

```
x=0.75;  xs=[];
a0=2.533; b0=0.543; a=a0; b=b0; h=1;
while abs(h/x)>1e-8
  f=exp(-a*x^2)-log(x+b); fp=-2*x*a*exp(-a*x^2)-1/(x+b); h=-f/fp; x=x+h;
end
x, xs=[xs x];
a=a0+0.001;
b=b0; h=1;
while abs(h/x)>1e-8
  f=exp(-a*x^2)-log(x+b); fp=-2*x*a*exp(-a*x^2)-1/(x+b); h=-f/fp; x=x+h;
end
x, xs=[xs x];
a=a0;
b=b0+0.002; h=1;
while abs(h/x)>1e-8
  f=exp(-a*x^2)-log(x+b); fp=-2*x*a*exp(-a*x^2)-1/(x+b); h=-f/fp; x=x+h;
end
x, xs=[xs x];
err=abs(xs(1)-xs(2))+abs(xs(1)-xs(3));                % felbidragen adderas
x_med_fel=[xs(1) err]
```

Svar: Roten är 0.7404 ± 0.0010 (eller 0.740 ± 0.002).

2.12 Två samband: $ae^{-b}+b=6$ och $a+b=12$. Sätt in $a=12-b$ i första sambandet så erhålls $(12-b)e^{-b}+b-6=0$. Uppritning av funktionen i vänsterledet ger att $b\approx 1$ och $b\approx 6$. Med Newton-Raphsons metod erhålls $b=0.763516$, $a=11.236484$ samt $b=5.984863$, $a=6.015137$.

2.13 Ekvationen kan skrivas $va/g+e^{-at}-1=0$. Newton-Raphsons metod blir:
$$a_{n+1}=a_n-(va_n/g+e^{-a_nt}-1)/(v/g-te^{-a_nt}).$$
$v=15$, $g=10$, $t=1.9$ ger lösningen $a=0.2595$.